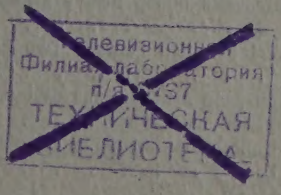
АКАДЕМИЯ НАУК СССР

TEORIIA

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

ТОМ III
ВЫПУСК
4



1958

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том III И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 4*
1958

СОСТАВ РЕДКОЛЛЕГИИ:

Бернштейн С. Н., ***Гнеденко Б. В.***, ***Золотарев В. М.***, (ответственный секретарь), ***Колмогоров А. Н.*** (главный редактор), ***Королюк В. С.***, ***Линник Ю. В.***, ***Прохоров Ю. В.*** (зам. главного редактора), ***Сарымсаков Т. А.***, ***Смирнов Н.В.***, ***Хинчин А. Я.***

СОДЕРЖАНИЕ

Мешалкин Л. Д. Предельные теоремы для цепей Маркова с конечным числом состояний 361
Meshalkin L. D. Limit Theorems for Markov Chains with a Finite Number of States 385
Whittle P. Continuous Generalizations of Tchebichev's Inequality 386
Уитл П. Непрерывные обобщения неравенства Чебышева 394
Добрушин Р. Л. Передача информации по каналу с обратной связью . . . 395
Dobrushin R. L. Transmission of Information in Channels with Feedback . 412
Волков И. С. О распределении сумм случайных величин, заданных на однородной цепи Маркова с конечным числом состояний 413
Volkov I. S. On the Distribution of Sums of Random Variables Defined on a Homogeneous Markov Chain with a Finite Number of States . . . 429
Хасьминский Р. З. Диффузионные процессы и эллиптические дифференциальные уравнения, вырождающиеся на границе области 430
Hasminsky R. Z. Diffusion Processes and Elliptic Equations Degenerating at the Boundary of the Region 451

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Башарин Г. П. Финальные вероятности многомерного марковского процесса, описывающего действия некоторых двухкаскадных телефонных систем с отказами 452
Basharin G. P. Final Probabilities for Multi-Dimensional Markov Processes Which Describe the Action of Some Two-Stage Telephone Busy-Signal Systems 458
Гладышев Е. Г. О многомерных стационарных случайных процессах . . . 458
Gladishev E. G. On Multi-Dimensional Stationary Random Processes . . 462
Добрушин Р. Л. Упрощенный метод экспериментальной оценки энтропии стационарной последовательности 462
Dobrushin R. L. A Simplified Method of Experimentally Evaluating the Entropy of a Stationary Sequence 464
Михалевич В. С. Последовательный выбор между двумя решениями для процесса Пуассона 465
Mihalevich V. S. Sequential Selection between Two Solutions for a Poisson Process 470
Цареградский И. П. О равномерном приближении биномиального распределения неограниченно делимыми законами 47
Tsaregradski I. P. On a Uniform Approximation for a Binomial Distribution of Infinitely Divisible Laws 474

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Рецензия на книгу У. Гренандер и М. Розенблатт «Статистический анализ стационарных временных рядов». *Гнеденко Б. В.* 475

Адрес редакции: Москва, В-234, МГУ, Мех.-матем. факультет, тел. В 9-14-03

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том III И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 4*
1958

П267/11/67
Новое отделение ГПНТБ
Телевизионная Филиал-лаборатория п/я 3737 ТЕХНИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ЦЕПЕЙ МАРКОВА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

Л. Д. МЕШАЛКИН

§ 1. Введение

Однородная цепь Маркова характеризуется матрицей вероятностей перехода

$$P = \| p_{u,v} \|_{u,v=1}^{s}.$$

Рассмотрим последовательность серий по n испытаний в n-ой серии, связанных в простую однородную цепь Маркова с матрицей вероятностей перехода, являющейся функцией n: $P = P(n)$. Будем обозначать $E_u (u = \overline{1,s})$ состояния, в которых может находиться система. Пусть μ означает число попаданий в первое состояние (E_1) за n шагов при испытаниях n-ой серии при условии, что в начальный (нулевой) момент времени система находилась в E_1. Нас будут интересовать распределения, к которым могут сходиться последовательности распределений вероятностей соответствующим образом нормированных величин μ при $n \to \infty$. Случай $s = 2$ был полностью исследован Р. Л. Добрушиным [1]. А. А. Ильяшенко [4] обобщил некоторые результаты Добрушина на произвольное s; однако он не ставил своей целью дать исчерпывающее описание всех возможных предельных законов распределения. Это описание выполнено в предлагаемой работе.

Основным результатом работы является теорема 6, доказываемая в § 3, в формулировку которой входит условие:

Существует такое $\varepsilon > 0$, что при любом n

$$\min_{\substack{u,v>2 \\ u \neq v}} (\eta_{1,u},\ \eta_{u,v} + \eta_{v,u}) > \varepsilon, \qquad (*)$$

где $\eta_{u,v}$ — условная вероятность попасть хоть раз в n-ой серии испытаний в E_v при условии, что в начальный момент времени система находилась в E_u.

Теорема 6. *Каковы бы ни были* $\alpha = \alpha(n)$ *и* $\theta = \theta(n)$ *при условии* (*) *распределение нормированной величины* $\alpha(\mu - n\theta)$ *может слабо сходиться к собственному распределению только в том случае, если это распределение является линейным преобразованием одного из распределений, указанных в теоремах* 1—5, *которые формулируются в* § 1 *и доказываются в* §§ 3 — 4.

Теорему 6 дополняет

Теорема 7. *Если условие* (*) *не выполнено, распределение величины* $\alpha(\mu - n\theta)$ *может слабо сходиться только к распределению, которое может получиться в качестве предельного в случае* $r \leqslant s-1$ *возможных состояний.*

Доказательство теорем 6 и 7 основано на следующих замечаниях:

1) Из сходимости распределений при $n \to \infty$ вытекает их сходимость по любой подпоследовательности $n_k \to \infty$.

2) Два предельных собственных распределения, получающихся при различных нормировках для одной и той же последовательности величин, получаются одно из другого линейным преобразованием.

Теорему 7 ввиду ее простоты мы докажем здесь же. Если условие (*) не выполнено, то можно выбрать подпоследовательность $n_k \to \infty$, по которой либо $\eta_{1,s} \to 0$ (здесь и в дальнейшем мы, особо того не оговаривая, будем менять нумерацию состояний $E_2, E_3, \ldots, E_s$ по мере надобности), либо $\eta_{1,u} > \varepsilon$ $(u = \overline{2,s})$, но $(\eta_{s-1,s} + \eta_{s,s-1}) \to 0$. Предположим, что для выбранной подпоследовательности $\eta_{1,s} \to 0$. Обозначим через H событие, состоящее в том, что при испытаниях n-ой серии система ни разу не попадает в s-ое состояние, а через $\overline{H}$ — противоположное событие. Очевидно, имеем

$$\mathbf{P}\{\mu < x\} = \mathbf{P}\{\mu < x \mid H\}\,\mathbf{P}\{H\} + \mathbf{P}\{\mu < x \mid \overline{H}\}\,\mathbf{P}\{\overline{H}\} = \mathbf{P}\{\mu < x \mid H\} +$$

$$+ \eta_{1,s}(\mathbf{P}\{\mu < x \mid \overline{H}\} - \mathbf{P}\{\mu < x \mid H\}). \qquad (1.1)$$

Но $\mathbf{P}\{\mu < x \mid H\}$ это вероятность, что x больше числа попаданий в первое состояние за n шагов для цепи Маркова, состоящей из $s-1$ состояний с матрицей вероятностей перехода

$$P^* = \|p^*_{u,v}\|_{u,v=1}^{s-1}, \quad \text{где } p^*_{u,v} = \frac{p_{u,v}}{1-p_{u,s}},$$

Из (1.1) следует, в силу $\eta_{1,s} \to 0$ $(n \to \infty)$, что если существует один из пределов $\lim \mathbf{P}\{\mu < x\}$, $\lim \mathbf{P}\{\mu < x \mid H\}$, то существует и другой, и они равны. Итак, в первом случае теорема доказана. Допустим теперь, что $\eta_{1,u} > \varepsilon$ $(u = \overline{2,s})$, $\eta_{s-1,s} + \eta_{s,s-1} \to 0$. Обозначим через $\eta_{1,s,1}$ условную вероятность попасть сначала в E_s, а затем в E_1 при условии, что в начальный момент система находилась в E_1. Очевидно, что $\eta_{1,s,1} \to 0$, так как $\eta_{s,s-1} \geqslant \frac{1}{4}\eta_{1,s,1}\,\eta_{1,s-1} \geqslant \frac{\varepsilon}{4}\eta_{1,s,1}$. А поэтому μ будет распределено так же, как число попаданий в первое состояние в цепи Маркова с $s-1$ состояниями и матрицей вероятностей перехода

$$P^{**} = \|p^{**}_{u,v}\|_{u,v=1}^{s-1}, \quad \text{где } p^{**}_{u,v} = \begin{cases} p_{u,v} & v = \overline{1,s-2} \\ p_{u,s-1} + p_{u,s} & v = s-1 \end{cases}.$$

Доказательство теоремы 6, проводимое в § 3, состоит в том, что устанавливается существование подпоследовательности $n_k \to \infty$, для которой выполняются условия какой-либо из теорем 1—5. В соответствии с замечаниями 1) и 2) это все, что требуется установить.

Переходя к формулировкам теорем 1—5, заметим, что в теоремах первой и второй предельные распределения — решетчатые и, поэтому, из сходимости характеристических функций получается сходимость по вариации. В теоремах 3—5 утверждается лишь слабая сходимость. Мы не рассматриваем вопроса о перенесении на случай состояний результатов Р. Л. Добрушина о равномерной аппроксимации распределений для μ при $n \to \infty$ и произвольной зависимости матрицы от n. В § 5 построен пример, показывающий, что простейшая равномерная локализация теорем 3—5 невозможна. Условимся, что величины зависящие от n, мы будем писать без индекса n, а чтобы отличать их от предельных значений, будем ставить над последними, если они существуют, черту. Например,

$$p_{u,v} \to \bar{p}_{u,v} \quad (n \to \infty).$$

Введем ряд обозначений и сокращений:

1. $A(t,\theta) = \| p_{u,v} e^{itz_v} \|_{u,v=1}^{s}$, где $z_v = \begin{cases} 1-\theta & v = 1 \\ -\theta & v = \overline{2,s} \end{cases}$;

2. $$A(\lambda, t, \theta) = \lambda E - A(t, \theta);$$

3. $$|A(\lambda, t, \theta)| = \sum_{v=0}^{s} \lambda^v B_{s-v}(t - \theta);$$

4. $C_{u,v}(\lambda, t, \theta)$ — алгебраическое дополнение элемента, стоящего на пересечении u-ой строки и v-го столбца в матрице $A(\lambda, t, \theta)$;

5. $$|A(1 + z, t, \theta)| = \sum_{v=0}^{s} z^v D_{s-v}(t, \theta);$$

6. $$D_s(t, \theta) = |A(1, t, \theta)| = \sum_{v=1}^{\infty} (it)^v M_v(\theta);$$

7. $$D_{s-1}(t, \theta) = \sum_{v=0}^{\infty} (it)^v N_v(\theta);$$

где θ — некоторая функция от n, определяемая отдельно в каждом конкретном случае;

8. $P_{s-v}^{i_1 \ldots i_v}$, $(i_k \neq i_l,\ k \neq l)$ — центральный минор $s - v$ порядка матрицы $A(1,0,0)$, получающийся из нее вычеркиванием $i_1 \ldots i_v$ строк и столбцов;

9. $$D'_{s-v} = \sum_{2 \leqslant i_1 < i_2 \ldots < i_{v-1} \leqslant s} P_{s-v}^{i_1 \ldots i_{v-1}}; \qquad D'_0 = 1; \quad D'_{-1} = 0;$$

10. $$D_{s-v} = D_{s-v}(0,0) = \sum_{i_1 < i_2 \ldots < i_v} P_{s-v}^{i_1 \ldots i_v}; \quad D_0 = 1;$$

11. х.ф. — характеристическая функция;

12. х.у. — характеристическое уравнение;

13. $x \asymp y$ означает, что существуют постоянные c_1 и c_2 такие, что

$$0 < c_1 \leqslant \left| \frac{x}{y} \right| \leqslant c_2 < \infty.$$

Далее будем предполагать, что условие (*) выполнено. В предположении, что существует $\overline{P}$, справедливы теоремы.

Теорема 1. *Если* 1. $\overline{P}$ *соответствует цепь Маркова, состоящая из одного класса существенных состояний с* k *подклассами, в которой первое состояние существенное и одно образует один из подклассов;*

2. *существуют пределы*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(B_u\left(t,\frac{1}{k}\right)\left(-\overline{B}_u\left(t,\frac{1}{k}\right)\right)\right)=F_u(t),\quad u=\overline{1,s},$$

то последовательность распределений вероятностей

$$\mu-\frac{n}{k}\qquad n\equiv r\pmod k$$

сходится по вариации при $n\to\infty$ *к закону с х.ф.*

$$f(t)=\sum_{u=1}^{k}\frac{\sum_{v=0}^{k-1}\lambda_u^{k-v}e^{-it\frac{v}{k}}}{k\lambda_r^{-u}}\exp\left[\frac{\sum_{w=1}^{s}F_w(t)\lambda_u^{s+1-w}}{k\overline{\varphi}(\lambda_u,t)}\right],\tag{1.2}$$

где $\overline{\varphi}(\lambda,t)=\dfrac{|\overline{A}(\lambda,t,\frac{1}{k})|}{\lambda^k-1}$, *а* λ_u, $(u=\overline{1,k})$ *— корни* k*-ой степени из единицы.*

Заметим, что

$$F_w(t)=a_we^{-it\frac{w}{k}}+b_we^{it\left(1-\frac{w}{k}\right)},$$

причем $\sum_{w=1}^{s}(a_w+b_w)=0$, так как всегда $\left|A\left(1,0,\frac{1}{k}\right)\right|=0$. Функция $\overline{\varphi}(\lambda,t)$ есть многочлен по λ степени $s-k$. Очевидно, все его корни должны быть по модулю меньше единицы. При фиксированном k наше распределение зависит от $2s-1$ параметров, $s+k-1$ из которых определяют $\sum_{w=1}^{s}F_w(t)\lambda_u^{s+1-w}$, а остальные $s-k$ — многочлен $\overline{\varphi}(\lambda,t)$.

Теорема 2. *Если существуют пределы*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{D_{s-k}}{n^{k-1}D_{s-1}}=a_k,\quad k=\overline{1,s};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nD'_{s-1}}{D_{s-1}}=b_0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{D'_{s-1}+D'_{s-k-1}}{n^{k-1}D_{s-1}}=b_k,\quad k=\overline{1,s},$$

причем $\max\,(l : a_l > 0) = k$, *то последовательность распределений* μ *сходится по вариации при* $n \to \infty$ *к закону с х.ф.*

$$f(t) = \sum_{v=1}^{l} \frac{1}{(m_v - 1)!} \cdot \frac{d^{m_v-1}}{dz^{m_v-1}} \left[\frac{\prod\limits_{u} (z - \delta_u(0))^{m_u}}{\prod\limits_{v} (z - \delta_w(t))^{m_w}(z-1)} e^z \right]_{z=\delta_v(t)}, \quad (1.3)$$

где $\delta_v(t)$ — *корни уравнения*

$$\sum_{w=1}^{k} (ze^{it})^w (a_w + (e^{it} - 1) b_w) + b_0 (e^{it} - 1) = 0,$$

кратности которых равны соответственно m_v. *Это распределение зависит от* $2s-1$ *параметров.*

Введем функцию β, характеризующую близость матрицы P к множеству матриц с детерминированным движением. Для этого обозначим $\mathfrak{M}_k$ множество матриц, удовлетворяющих первому условию теоремы 1, и положим $\mathfrak{M} = \bigcup\limits_{k=1}^{s} \mathfrak{M}_k$

$$\beta = \begin{cases} p_1 & , \text{ если } \bar{p}_1 = 0 \\ 1 & , \text{ если } \bar{p}_1 \neq 0 \text{ и } \bar{P} \in \mathfrak{M} \\ \inf\limits_{\theta \in \mathfrak{M}} \max\limits_{u,v} \left| p_u p_{uv} - q_u q_{uv} \right| & , \text{ если } \bar{P} \in \mathfrak{M}, \end{cases}$$

где p_u $(u = \overline{1,s})$ — финальные вероятности для цепи P

$$p_u = \frac{c_{uu}(1,0,0)}{D_{s-1}}.$$

Теперь может быть сформулирована

Теорема 3. *Если* $\bar{P}$ *соответствует цепь Маркова, состоящая из одного класса существенных состояний, и* $n\beta \to \infty$ $(n \to \infty)$, *то последовательность распределений* $\alpha(\mu - np_1)$ *слабо сходится к нормальному закону;* $p_1 = \dfrac{D'_{s-1}}{D_{s-1}}$; $\alpha = \sqrt{-\dfrac{D_{s-1}}{2nM_2(p_1)}}$.

Теорема 4. *Если* $\bar{P}'$ *соответствует цепь Маркова, состоящая не менее чем из двух классов существенных состояний, и*

$$\frac{D_{s-2}}{nD_{s-1}} = o(1), \quad (1.4)$$

то последовательность распределений $\alpha(\mu - n\theta)$, *где* $\alpha = o(1)$, *может сходиться к собственному предельному закону только в том случае, если этот закон является линейным преобразованием закона, х.ф. которого имеет вид*

$$f(t) = \frac{1 + \sum\limits_{u=1}^{s-1} (it)^u c_u}{1 + \sum\limits_{v=1}^{s-1} (it)^v b_v} \exp\left[- \frac{\sum\limits_{k=2}^{s} (it)^k a_k}{1 + \sum\limits_{w=1}^{s-1} (it)^w b_w} \right],$$

где a_v, b_v, c_v — *некоторые постоянные.*

Замечание. Если в формулировке теоремы 4 дополнительно потребовать, чтобы уравнение $|\lambda E - \overline{P}| = 0$ не имело кратных корней, по модулю равных единице, но отличных от нее, то

$$a_k = \lim_{n\to\infty} \frac{n\alpha^k M_k(p_1)}{D_{s-1}},$$

$$b_k = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^k N_k(p_1)}{D_{s-1}},$$

$$c_k = \lim_{n\to\infty} \frac{(\theta,\alpha)^k D_{s-k-1}}{D_{s-1}},$$

где $p_1 = \dfrac{D'_{s-1}}{D_{s-1}}$.

Теорема 5. *Если*: 1) $\dfrac{D_{s-2}}{nD_{s-1}} \asymp 1$, 2) $\alpha = \dfrac{D_{s-1}}{nD'_{s-1}} = o(1)$, *то последовательность распределений* $\alpha\mu$ *может слабо сходиться к собственному предельному закону только в том случае, если этот закон является линейным преобразованием закона, х.ф. которого имеет вид*

$$f(t) = \sum_{v=1}^{l} \frac{1}{(m_v-1)!} \cdot \frac{d^{m_v-1}}{dz^{m_v-1}} \left[\frac{\prod_{u} (z-\delta_u(0))^{m_u}}{\prod_{w\neq v} (z-\delta_w(t))^{m_w(z-1)}} e^z \right]_{z=\delta_v(t)}, \qquad (1.6)$$

где $\delta_v(t)$ — *корни уравнения*

$$\sum_{w=1}^{s} z^w (a_w - itb_w) - it = 0 \qquad (1.7)$$

кратности которых равны соответственно m_v;

$$a_w = \lim_{n\to\infty} \frac{D_{s-w}}{n^{w-1} D_{s-1}}, \qquad w = \overline{1,s};$$

$$b_w = \lim_{n\to\infty} \frac{D'_{s-w-1} + D'_{s-w}}{n^w D'_{s-1}}, \quad w = \overline{1,s}.$$

Расположение материала. В § 2 доказываются или формулируются со ссылкой на соответствующую литературу, где можно найти доказательство, несколько вспомогательных предложений, используемых в дальнейшем. Новым и очень важным для понимания всей работы является выяснение вероятностного смысла центральных миноров матрицы $E - P$. Следующие два параграфа посвящены доказательству сформулированных в § 1 теорем 1—6. В заключение приводится несколько примеров.

Настоящая работа возникла как продолжение дипломной работы, в которой под руководством С. Х. Сираждинова был исследован случай $s=3$. Я пользуюсь случаем поблагодарить С. Х. Сираждинова за постановку задачи и А. Н. Колмогорова за его внимание к работе и за советы, которые способствовали ее улучшению.

§ 2. Несколько вспомогательных предложений

Всюду в этом параграфе мы будем иметь дело с последовательностью испытаний, связанных в простую однородную цепь Маркова с матрицей вероятностей перехода P. Поскольку последовательность можно рассматривать как частный случай схемы серий, мы сохраним обозначения § 1. По поводу применяемой терминологии см. [6] или § 5 и § 7 [9].

1. Характеристические функции для дискретных цепей Маркова построены в работах [7] (гл. I), § 36—37 [8], [10] (гл. I). В наших обозначениях характеристическая функция $f(t)$ случайной величины $\mu - n\theta$

$$f(t) = \sum_{u=1}^{k} \frac{1}{(m_u - 1)!} D_{\lambda}^{m_u - 1} \left[\frac{\lambda^n \sum_{v=1}^{s} C_{v,1}(\lambda, t, \theta)}{\psi_u(\lambda, t, \theta)} \right]_{\lambda = \lambda_u(t)}, \tag{2.1}$$

где $\lambda_u(t)\,(u = \overline{1,k})$ — собственные значения матрицы $A(t, \theta)$ соответственно кратностей m_u, $\sum_{u=1}^{k} m_u = s$; $D_{\lambda}^{m_u - 1}$ — знак дифференцирования по λ $m_u - 1$ раз. Функция $\psi_u(\lambda, t, \theta)$ определена следующим образом:

$$\psi_u(\lambda, t, \theta) = \frac{|A(\lambda, t, \theta)|}{(\lambda - \lambda_u(t))^{m_u}}.$$

2. В дальнейшем нам потребуется ряд свойств собственных значений матрицы $A(\lambda, t, \theta)$.

Лемма 1. *Все собственные значения матрицы $A(\lambda, t, \theta)$ по модулю не больше единицы.*

Лемма 2. *Если P — неразложимая примитивная матрица, то единица является простым корнем х. у. $|\lambda E - P| = 0$. Все остальные корни по модулю менее единицы.*

Лемма 3. *Если $P \in \mathfrak{M}_k$, то $\left| A\left(\lambda, t, \frac{1}{k}\right) \right| = (\lambda^k - 1)\varphi(\lambda, t)$, причем все корни уравнения $\varphi(\lambda, t) = 0$ по модулю менее единицы.*

Основные свойства корней х.у. матрицы P широко известны (см., например, § 8 [9]). Леммы 1 — 3 являются, по существу, перенесением этих свойств на матрицы $A(t, \theta)$; при этом используется лемма 4, заимствованная из [2] (стр. 327).

Лемма 4. *Если имеются две квадратные матрицы $C = \|c_{uv}\|_1^s$ и $A = \|a_{uv}\|_1^s$ и A — неразложимая матрица, причем $|c_{uv}| \leqslant a_{uv}$ и, $v = \overline{1,s}$, то между любым характеристическим числом γ матрицы C и максимальным характеристическим числом r матрицы A имеет место неравенство $|\gamma| \leqslant r$. При этом знак равенства может иметь место в том и только в том случае, когда $C = e^{i\varphi} DAD^{-1}$, где $e^{i\varphi} = \frac{\gamma}{r}$, а D — диагональная матрица, у которой диагональные элементы по модулю равны единице.*

3. Из работы [8] (стр. 263) мы заимствуем одну замечательную форму-

лу, принадлежащую Фреше. Пусть единица — простой корень х.у. матрицы P, тогда $D_s \neq 0$ и

$$-\frac{M_2(p_1)}{D_{s-1}} = \sum_{v=1}^{s} p_v \sum p_{v,u}(z_u + \gamma_u - \gamma_v)^2, \tag{2.2}$$

где p_v — финальная вероятность, $z_u = \begin{cases} 1 - p_1 & u = 1 \\ -p_1 & u \neq 1 \end{cases}$ и γ_u—некоторые постоянные. Назовем i-ым циклом блуждание системы между i-ым и $i+1$-ым попаданием в E_1, причем мы включаем в цикл $i+1$ попадание и исключаем i-ое. Из (2.2) следует, что если $M_2(p_1) = 0$, то либо $p_1 = 0$, либо каждый цикл имеет одну и ту же длину $k = \frac{1}{p_1}$, то есть $P \in \mathfrak{M}_k$. С другой стороны, хорошо известно [7], что при выполнении любого из этих условий величина $\alpha(\mu - n\theta)$ не может иметь нормального распределения и, следовательно, $M_2(p_1) = 0$, так как в противном случае $\frac{1}{\sqrt{n}}(\mu - np_1)$ сходилась бы к нормальному закону с параметрами $\left(0, \sqrt{-\frac{2M_2(p_1)}{D_{s-1}}}\right)$. Подытоживая наши рассуждения, имеем

Лемма 5. *Если матрице P соответствует цепь с одним классом существенных состояний, то для того, чтобы $M_2(p_1) = 0$, необходимо и достаточно выполнения одного из условий*:

1. $p_1 = 0$, 2. $P \in \mathfrak{M}$.

4. Прибавив в определителе $|A(\lambda, 0, 0)|$ все столбцы к первому и затем, разлагая его по элементам первого столбца, получим

$$|A(\lambda, 0, 0)| = (\lambda - 1)\sum_{u=1}^{s} C_{u,1}(\lambda, 0, 0).$$

Применяя полученное соотношение, имеем

$$\sum_{v=1}^{s} C_{v,1}(\lambda, t, \theta) = e^{it(1-s)\theta} \sum_{v=1}^{s} C_{v,1}(\lambda e^{it\theta}, 0, 0) = \frac{e^{it(1-s)\theta}}{\lambda e^{it\theta} - 1} |A(\lambda e^{it\theta}, 0, 0)|. \tag{2.3}$$

Полученная формула значительно упрощает вычисления. Например, если единица — простой корень P, то

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sum_{v=1}^{s} C_{v,1}(\lambda_u(t), t, \theta)}{\psi_u(\lambda_u(t), t, \theta)} = \lim_{t\to 0} \frac{\prod_{v} (\lambda_u(t)\, e^{it\theta} - \lambda_v(0))^{m_v}}{(\lambda_u(t)\, e^{it\theta} - 1)\prod (\lambda_u(t) - \lambda_w(t))^{m_v}} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(\lambda_u(t)\, e^{it\theta} - \lambda_u(0))^{m_u}}{\lambda_u(t)\, e^{it\theta} - 1} = \begin{cases} 1, & \lambda_u(0) = 1 \\ 0, & \lambda_u(0) \neq 1. \end{cases} \tag{2.4}$$

Замечание. Если нас будут интересовать многомерные предельные законы, то одно из основных затруднений при применении матричного метода — это отсутствие аналога (2.3).

5. Обозначим χ длину цикла, введенного в третьем пункте. Из [6] мы заимствуем формулу

$$\mathbf{M}\chi = \frac{1}{p_1}. \tag{2.5}$$

Пусть случайная величина ν имеет показательное распределение с параметром β, тогда

$$\mathbf{M}\nu = \frac{1}{\beta}, \tag{2.6}$$

$$\mathbf{D}\nu = \frac{1}{\beta^2}. \tag{2.7}$$

Формулы этого пункта потребуются нам при применении метода Колмогорова — Деблина [9] § 13.

6. Вероятностный смысл определителей центральных миноров матрицы $A(1, 0, 0) = E - P$. Выделим в матрице P k элементов, не стоящих на главной диагонали. Построим новую стохастическую матрицу Q, полагая $q_{vu} = p_{uv}$ при $u \neq v$, если p_{uv} — выделенный элемент, и $q_{uv} = 0$ в противном случае. Если в цепи, соответствующей матрице Q, состояния $E_{k_1}, E_{k_2}, \ldots, E_{k_v}$ несущественные, а $E_{k_{v+1}}, \ldots, E_{k_s}$ — существенные, мы будем говорить, что по выделенным элементам можно перейти в $\bigcup_{w=v+1}^{s} E_{k_w}$. Назовем путем, ведущим в группу выделенных состояний $\bigcup_{v\ 1}^{i} E_{k_v}$, совокупность $s-i$ элементов матрицы P, по которым можно перейти в $\bigcup_{v=1}^{i} E_{k_v}$. Путь мы будем изображать в виде произведения

$$\prod_{k=1}^{s-i} p_{v_k u_k}, \tag{2.8}$$

где $p_{v_k u_k}$ — выделенные элементы. Численное значение (2.8) назовем весом пути. Тогда $P_{s-i}^{k_1,\ldots,k_i}$ есть сумма всех путей, ведущих в $\bigcup_{v=1}^{i} E_{k_v}$ или их вес. Доказательство этого утверждения мы проведем методом математической индукции по i при фиксированном s. Для $i = s-1$ наше утверждение очевидно. Допустим, что оно доказано для $i+1$, и докажем его для i. Очевидно, рассуждение достаточно провести для $P_{s-i}^{1,2,\ldots,i}$

$$P_{s-i}^{1,2,\ldots,i} = \begin{vmatrix} \sum_{u=1}^{s} p_{i+1,u}, & -p_{i+1,\,i+2} \cdots - p_{i+1,s} \\ -p_{i+2,\,i+1}, & \sum_{u=1}^{s} p_{i+2,\,u} \cdots - p_{i+2,\,s} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ -p_{s,\,i+1}, & -p_{s,\,i+2} \cdots \sum_{u\ 1}^{s} p_{s,u} \end{vmatrix}. \tag{2.9}$$

Из (2.9) видно, что в $P_{s-i}^{1,\dots,i}$ могут входить только такие произведения $\prod_{k=1}^{s-i} p_{u_k v_k}$, для которых $\min_k v_k \leqslant i$. Но отсюда, так как элементы $p_{u,v}$, где $v \leqslant i$, стоят только на главной диагонали, беря $P_{s-i-1}^{1,\dots,i,u}$, получаем в силу нашего предположения, что каждое такое произведение входит со знаком плюс. С другой стороны, каждый путь, ведущий в $\bigcup_{v=1}^{i} E_v$, входит в $P_{s-i}^{1,2,\dots,i}$, а это и доказывает наше утверждение. Возможна еще следующая геометрическая интерпретация пути. Будем изображать состояния нашей системы точками на плоскости. Выделенный элемент p_{uv} стрелкой, ведущей из E_u в E_v. Тогда путь, ведущий в $\bigcup_{v=1}^{i} E_{k_v}$, есть совокупность $s-i$ стрелок, по которым из каждого $E_{k_v}, v=\overline{i+1,s}$ можно пройти в $\bigcup_{v=1}^{i} E_{k_v}$. При таком графическом изображении пути можно говорить о ветвях, на которые распадается путь. Каждая ветвь ведет в одно из состояний $E_{k_v}, v=\overline{1,i}$.

§ 3. Доказательство теоремы 6 и схемы доказательства теорем 1—5

В первой части этого параграфа мы выясним вероятностный смысл требований теорем 1—5. Затем предположив, что эти теоремы верны, докажем теорему 6. На примере теоремы 1 будет разобрана схема доказательства теорем 1—5.

1. Обозначим η_{uv}^{τ} условную вероятность попасть хоть раз за τ шагов n-ой серии испытаний в E_v при условии, что в начальный момент времени система находится в E_u. Условимся говорить, что из E_u система может перейти в E_v только за время не меньшее τ, если для любых $\varepsilon > 0$, $\tau' = o(\tau)$ найдется n_0 такое, что $\eta_{uv}^{\tau'} < \varepsilon$ для $n > n_0$. Пути, введенные в § 2, мы будем различать по весу. Будем говорить, что путь $\prod_i p_{\alpha_i,\beta_i}$ легче пути $\prod_i p_{u_i,v_i}$, если $\prod_i p_{\alpha_i,\beta_i} = o(\prod_i p_{u_i,v_i})$. Путь $\prod_i p_{\alpha_i,\beta_i}$ будем называть тяжелым в D_{s-k}, если

$$\prod_i p_{\alpha_i,\beta_i} \in D_{s-k} \text{ и } \prod_i p_{\alpha_i,\beta_i} \asymp D_{s-k}.$$

(В первом случае под D_{s-k} мы понимаем набор всевозможных путей длины $s-k$, во втором случае - их вес. Одни и те же обозначения сохранены для удобства.) Будем считать в дальнейшем, что в каждом D_{s-k} существует тяжелый в нем путь. Это предположение не нарушает общности, поскольку всегда найдется подпоследовательность, по которой один из путей, принадлежащих D_{s-k}, будет тяжелым в нем, перенос же доказательств, проводимых ниже, на случай подпоследовательности не представляет труда.

Выясним вероятностный смысл условия

$$\alpha \frac{D_{s-2}}{D_{s-1}} \asymp 1. \tag{3.1}$$

Для этого возьмем тяжелый в D_{s-2} путь. Он распадается на две ветви, одна из которых ведет в E_u, другая в E_v. Из (3.1) следует, что этот путь, умноженный на α, не легче любого из путей, входящих в D_{s-1}, в частности любого из путей, ведущих в E_u. Но отсюда следует, что из E_v можно перейти в E_u только за время, не меньшее α. E_u и E_v в нашем рассуждении можно поменять местами. Теперь легко могут быть доказаны леммы.

Лемма 6. *Если для величины* $\alpha(\mu - n\theta)$ *существует собственное предельное распределение, то*

$$\alpha\theta \frac{D_{s-k}}{D_{s-k+1}} = O(1), \quad \alpha \frac{D'_{s-k}}{D_{s-k+1}} = O(1).$$

Лемма 7. *Если* $\dfrac{D_{s-2}}{nD_{s-1}} \asymp 1$, *то все собственные предельные законы для величины* $\alpha(\mu - n\theta)$ *могут быть с точностью до линейного преобразования получены при* $\theta = 0$.

Лемма 8. *Если выполнено условие* (*), *то* $\dfrac{D_{s-2}}{nD_{s-1}} = O(1)$.

Для доказательства леммы 6 заметим, что если бы

$$\alpha\theta \frac{D_{s-k}}{D_{s-k+1}} \to \infty \quad (n \to \infty),$$

то это означало бы, что найдутся k состояний таких, что обмен между ними и переход из $k-1$ из них в E_1 возможны только за время, не меньшее $\tau = \dfrac{D_{s-k}}{D_{s-k+1}}$. Но так как в силу (*) в каждое из этих $k-1$ состояний система попадает с положительной вероятностью, предельное распределение для величины $\alpha(\mu - n\theta)$ не должно меняться при изменении n на $\tau' = o(\tau)$. Но τ' можно выбрать так, чтобы $(\alpha\theta)^{-1} = o(\tau')$, но тогда $\alpha\theta\tau' \to \infty$, что противоречит предположению, что при нормировке $\alpha(\mu - n\theta)$ мы имеем собственное распределение. Если же

$$\alpha \frac{D'_{s-k}}{D_{s-k+1}} \to \infty \quad (n \to \infty),$$

то, повторяя наши рассуждения и учитывая, что в этом случае E_1 входит в группу состояний, обмен между которыми возможен только за время, не меньшее $\tau = \dfrac{D'_{s-k}}{D_{s-k+1}}$, получаем противоречие, доказывающее нашу лемму и в этом случае. Из доказательства леммы 6 следует, что для того, чтобы при выполнении условия леммы 7 $\alpha(\mu - n\theta)$ сходилось к собственному закону, для любого $\tau = o(n)$ должно иметь место $\tau\alpha\theta = o(1)$. Отсюда следует, что $n\alpha\theta = O(1)$, что и доказывает лемму 7. Доказательство леммы 8 не представляет труда.

2. Предположим, что теоремы 1—5 верны, докажем теорему 6. Для этого рассмотрим следующую схему. (Схема 1). Будем продвигаться по нашей схеме слева направо, выбирая из последовательности, для которой

выполняются условия первого столбца, подпоследовательность, для которой будет выполняться одно из условий второго столбца, а из новой подпоследовательности при следующем переходе подпоследовательность, для которой будет выполняться одно из условий третьего столбца и так до тех пор, пока не дойдем до клетки с номером теоремы. Если для выбранной подпоследовательности выполняются условия, подводящие к теоремам 1 или 2, то, как легко проверить, величины, существования предела которых

Схема 1

<table>
<tr><td rowspan="5">$\frac{D_{s-2}}{nD_{s-1}} = o(1)$</td><td rowspan="3">$\overline{D}_{s-1} \neq 0$</td><td rowspan="2">$n\beta < c < \infty$ $(n \to \infty)$</td><td>$\overline{p_1} > 0$</td><td>Теорема 1</td></tr>
<tr><td>$\overline{p_1} = 0$</td><td>Теорема 2</td></tr>
<tr><td>$n\beta \to \infty$ $(n \to \infty)$</td><td colspan="2">Теорема 3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\overline{D}_{s-1} = 0$</td><td>$\alpha \asymp 1$</td><td colspan="2">Теорема 2</td></tr>
<tr><td>$\alpha = o(1)$</td><td colspan="2">Теорема 4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{D_{s-2}}{nD_{s-1}} \asymp 1$</td><td>$\frac{nD'_{s-1}}{D_{s-1}} = O(1)$</td><td colspan="3">Теорема 2</td></tr>
<tr><td>$\frac{D_{s-1}}{nD'_{s-1}} = o(1)$</td><td colspan="3">Теорема 5</td></tr>
</table>

мы требуем в соответствующей теореме, ограничены. Следовательно существует подпоследовательность, по которой эти пределы существуют. Вспомнив формулировку теорем 3—5, видим, что их также можно применить к выбранной подпоследовательности. Из лемм 6 и 8 следует, что при переходе от i-го столбца к $i+1$ требования таковы, что с вероятностью 1 осуществляется для бесконечной подпоследовательности хотя бы одно из них. Но так как из сходимости распределений при $n \to \infty$ должна вытекать их сходимость по любой подпоследовательности $n_k \to \infty$, теорема 6 доказана.

3. Теоремы 1—5 доказываются по одной схеме. Проиллюстрируем эту схему на примере теоремы 1. Выбираем α и θ такими, как это указано в формулировке теоремы $\alpha = 1$, $\theta = \frac{1}{k}$. Выделяем корни х.у.

$$|A(\lambda, \alpha t, \theta)| = 0, \tag{3.2}$$

которые мы должны учитывать при вычислении предела $f(\alpha t)$ при $n \to \infty$. Заметим, что мы заведомо можем не учитывать те корни (3.2), для которых $|\lambda_u(\alpha t)| \leqslant r < 1$. В самом деле, в этом случае

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{u:|\lambda_u(\alpha t)|<r<1} \frac{1}{(m_u-1)!} D_\lambda^{m_u-1}\left[\frac{\lambda^n \sum_{v=1}^{s} c_{v,1}(\lambda, \alpha t, \theta)}{\psi_u(\lambda, \alpha t, \theta)}\right]_{\lambda=\lambda_u(\alpha t)} < c \lim_{n\to\infty} r^n = 0.$$

К единице по модулю в теореме 1 в силу леммы 3 стремятся k корней. Они все простые. Пользуясь разложением $\left|A\left(\lambda_u(t), t, \frac{1}{k}\right)\right|$ в ряд по степеням $\lambda_u(t) - \overline{\lambda}_u$, подсчитаем для выделенных корней

$$\lim_{n\to\infty} n(\lambda_u(t) - \overline{\lambda}_u) = \delta_u(t); \quad u = \overline{1, k}.$$

В силу предположения 2 теоремы он существует и равен

$$\delta_u(t) = -\frac{\sum_{w=1}^{s} F_w(t)\,\overline{\lambda}_u^{s+1-w}}{k\overline{\varphi}(\overline{\lambda}_u)}.$$

Еще раз применив лемму 2 и воспользовавшись формулой (2.3), имеем

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\equiv r(\mathrm{mod}\,k)}} \frac{\sum_{w=1}^{s} C_{w,1}\left(\lambda_u(t),\, t,\, \frac{l}{k}\right) e^{n}}{\psi_u\left(\lambda_u(t),\, t,\, \frac{1}{k}\right)} = \frac{\sum_{v=0}^{k-1} \overline{\lambda}_u^{k-v} e^{-it\frac{k}{v}}}{k\overline{\lambda}_u^{-r}}.$$

После того как все пределы найдены, составляем х.ф. предельного закона

$$\bar{f}(t) = \sum_{u:|\lambda_u|=1} \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\equiv r(\mathrm{mod}\,k)}} \frac{\sum_{w=1} C_{w,1}(\lambda_u(\alpha t),\, \alpha t,\, 0)\,\overline{\lambda}^{n}}{\psi_u(\lambda_u(\alpha t),\, \alpha t,\, 0)} \exp\left[\lim_{n\to\infty} n(\lambda_u(\alpha t) - \overline{\lambda}_u)\right].$$

§ 4. Доказательство теорем 2—5

1. Доказательство теоремы 3 мы начнем с установления следующей леммы.

Лемма 9. *Если* $\overline{D}_{s-1} \neq 0$, *то* $M_2(p_1) \asymp \beta$, $M_k(p_1) = O(\beta)$; $k \geqslant 3$.

В силу леммы 5 это утверждение очевидно, если $p_1 \neq 0$ и $P \in \mathfrak{M}$. Пусть теперь $P \in \mathfrak{M}_k$. Построим два цикла разной длины (см. § 2 п. 3) таких, чтобы вероятность осуществления каждого из них была не меньше $c\beta$, где c — некоторая постоянная, не зависящая от n. Такие циклы всегда построить можно. Так как циклы разной длины, то хотя бы вдоль одного из них найдутся такие два последовательные состояния E_{u_0} и E_{v_0}, что $z_{u_0} + \gamma_{u_0} - \gamma_{v_0} \asymp 1$. Но тогда, воспользовавшись (2.2), имеем

$$M_2(p_1) \asymp \sum_{v=1}^{n} p_v \sum_{u=1}^{n} p_{vu}(z_u + \gamma_u - \gamma_v)^2 \geqslant c p_{v_0} p_{v_0 u_0}.$$

Вдоль цикла же, так как вероятность осуществления его больше $c\beta$, $\beta = O(p_{v_0} p_{v_0 u_0})$. Итак, $\beta = O(M_2(p_1))$. С другой стороны, в силу леммы 3 и определения β, $\left|A\left(1,\, t,\, \frac{1}{k}\right)\right|$ есть сумма единицы и выражений вида

$$-\, p_{1,u_1} p_{u_1,u_2} p_{u_2,u_3} \ldots p_{u_{k-1},1} \tag{4.1}$$

$$\varepsilon p_{u_1,v_1} p_{u_2,v_2} p_{u_3,v_3} \ldots p_{u_l,v_l} e^{it\sum_{w=1}^{l} z_{v_w}}, \tag{4.2}$$

где $\varepsilon = \pm 1$, $l \leqslant s$; выражение (4.1) есть цикл длины k, причем вес всех таких циклов отличается от единицы на величину $O(\beta)$. Каждое же (4.2) разбивается на несколько непересекающихся замкнутых путей,

поэтому

$$|p_{u_1,v_1}p_{u_2,v_2}\dots p_{u_l,v_l}| = O(\beta).$$

Но отсюда следует, что $M_k(p_1) = O(\beta)$, и в случае $P \in \mathfrak{M}_k$ лемма доказана. Пусть теперь $\overline{p_1} = 0$. Дифференцируя $|A(1, t, p_1)| = 0$ k раз по t и полагая затем $t = 0$, непосредственно убеждаемся, что $M_k(p_1) = O(\beta)$; $k \geqslant 2$

$$\frac{d^2}{dt^2}|A(1, t, p_1)|_{t=0} = -D_{s-1}p_1(1-p_1) - 2p_1^2D_{s-2} + 2p_1D'_{s-2} =$$

$$= p_1(2D'_{s-2} - D_{s-1}) + O(p_1^2).$$

Легко убедиться, что $\overline{D}'_{s-2} \geqslant \overline{D}_{s-1}$. Для этого достаточно сопоставить каждому пути в $\overline{D}'_{s-2}$ группу путей в $\overline{D}_{s-1}$, получающихся из него добавлением перехода из E_1. Следовательно,

$$M_2(p_1) \asymp p_1.$$

Лемма доказана.

Положим теперь $\alpha = \sqrt{-\frac{D_{s-1}}{2nM_2(p_1)}}$. В силу предположений теоремы имеем $\overline{D}_{s-1} > 0$, $n\beta \to \infty$, но тогда $\alpha = o(1)$. Применив лемму 2 и (2.4), получаем, что при вычислении предела х.ф. надо учитывать только $\lambda_1(\alpha t)$. Из леммы 9 следует, что

$$\lambda_1^n(\alpha t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) + o(1).$$

Теорема 3 доказана.

2. Основная трудность при доказательстве теорем 2, 4, 5 возникает от сближения корней, стремящихся по модулю к единице. Пока корни оставались по модулю меньше $r < 1$, этой трудности не существовало, так как r^n $(n \to \infty)$ убывало достаточно быстро. Основной результат, который мы здесь получим, будет заключаться в том, что при вычислении предела х.ф. надо учитывать только те корни, для которых существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} n(\lambda_u(\alpha t) - 1). \tag{4.3}$$

Этот результат будет следовать из следующих двух лемм.

Лемма 10. *Если* $\overline{\lambda}_u = 1$, *то* $\operatorname{Reel}(\lambda_u(0) - 1) \asymp \lambda_n(0) - 1$.

Лемма 11. *Если среди собственных значений матрицы* $\overline{P}$ *есть кратные, по модулю равные единице, но отличные от нее, то распределение величины* $\alpha(\mu - n\mathfrak{b})$ *при выполнении условий одной из теорем* 2, 4 *или* 5 *может слабо сходиться только к распределению, которое может получиться в качестве предельного в случае* $k \leqslant s - 1$ *возможных состояний.*

Лемму 10 можно найти в работах [3], [5], но ввиду ее простоты докажем ее здесь. Для того чтобы число λ было собственным числом некоторой стохастической матрицы порядка s, необходимо и достаточно, чтобы существовал некоторый ν-угольник Q $(\nu \leqslant s)$ такой, что $\lambda Q \subseteq Q$. Пусть Q есть ν-угольник, соответствующий собственному значению $\lambda_u(0)$ матрицы P

и пусть $y_0 \in Q$ таково, что $|y_0| \geqslant |y|$ для всех $y \in Q$. Предположим, что лемма не верна, тогда $\lambda_u(0) = 1 + i\beta + o(\beta)$, где $\beta^2 > 0$, $\beta = o(1)$. Согласно определению Q, векторы $\lambda_u^h(0)\, y_0 = 1 + ik\beta + o(\beta)$ $(k = 1, \ldots, 6)$ должны принадлежать Q, а это противоречит тому, что Q есть ν-угольник с максимальным вектором y_0. Противоречие доказывает нашу лемму.

Прежде чем переходить к доказательству леммы 11, заметим, что для простых, по модулю равных единице, но отличных от нее, собственных значений $\overline{P}$ никаких осложнений не возникает. В самом деле, в случае теорем 4 и 5 $\alpha = o(1)$ и для простых собственных значений $A(\alpha t, \theta)$ справедлива формула (2.4). В случае же теоремы 2 $\theta = 0$ и E_1 — несущественное состояние для матрицы $\overline{P}$, следовательно, если в этом случае $|\overline{\lambda}_u(t)| = 1$, то $\overline{\lambda}_u(t)$ не зависит от t. Очевидно, в этом случае также

$$\lim_{n \to \infty} C(\lambda_u(t),\ t,\ 0) = 0.$$

Предположим теперь, что выполнено условие леммы 11, тогда в силу связи между собственными значениями $\overline{P}$ и классами и подклассами существенных состояний соответствующей ей цепи Маркова мы, не нарушая общности, можем считать, что последние l состояний в ней E_{s-l+1}, $E_{s-l+2}, \ldots, E_s$ образуют один класс существенных состояний с $k < l$ подклассами. Будем называть эти состояния выделенными. Доказательство леммы состоит в том, что строится новая цепь Маркова с матрицей P^*, в которой выделенные состояния заменены одним состоянием, но при этом распределение вероятностей длины циклов, начинающихся в E_1, меняется настолько мало, что это не сказывается на предельном распределении μ_1. Перейти из выделенных состояний в E_1 система может только за время бесконечно большое по сравнению с единицей, поэтому до выхода она побывает бесконечно большое число раз в каждом из выделенных состояний. Время пребывания в E_u с точностью до $o(1)$ будет пропорционально q_u $u = \overline{s-l+1, s}$, $\sum_{v=s-l+1}^{s} q_v = 1$. Чтобы определить q_u, рассмотрим матрицу $P^{**} = \| p^{**}_{u,v} \|_{u,v=s-l+1}^{s}$, где

$$p^{**}_{u,v} = \frac{p_{u,v}}{\sum_{w=s-l+1}^{s} p_{u,w}}.$$

Тогда

$$q_u = \frac{P^{**u}_{l-1}}{\sum_{w=s-l+1}^{s} P^{**w}_{l-1}}.$$

Теперь мы можем определить $P^* = \| p^*_{u,v} \|_{u,v=1}^{s-l+1}$, где

$$p^*_{u,v} = p_{u,v}, \quad u, v \leqslant s-l,$$

$$p^*_{u,s-l+1} = \sum_{w=s-l+1}^{s} p_{u,w}, \quad u \leqslant s-l$$

$$p^*_{s-l+1,u} = \sum_{w=s-l+1}^{s} p_{w,u} q_w, \; u \leqslant s-l.$$

Лемма доказана.

Не нарушая общности, можно считать, что корни х.у. не могут сближаться быстрее, чем $\frac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$, ибо в противном случае изменением матрицы P на величину $o\left(\frac{1}{n}\right)$ эти корни можно превратить в кратные. Изменение же P на $o\left(\frac{1}{n}\right)$ не повлияет на предельное распределение. Сейчас мы покажем, что при вычислении предела х.ф. можно не учитывать те корни х.у., для которых не существует предел (4.3). Доказательство основано на том простом замечании, что

$$\lim_{x \to \infty} x^k e^{-x} = 0,$$

причем существенно используется лемма 10. Чтобы не загромождать изложения, выкладка проводится при $\theta = 0$. В случае $\theta \neq 0$ изменения очевидны, надо только учесть, что в силу леммы 6

$$\alpha\theta = O\left(\frac{D_{s-1}}{D_{s-2}}\right), \; \frac{D_{s-1}}{D_{s-2}} \asymp \min_{u \geqslant 2} |\lambda_u(\alpha t) - 1|.$$

$$\left| \lim_{\substack{n \to \infty \\ (n \to \infty)}} \sum_{u:|\lambda_u(\alpha t)-1| n \to \infty} \frac{1}{(m_u-1)!} D_\lambda^{m_u-1} \left[\frac{\lambda^n \sum_{v=1}^{s} C_{v,1}(\lambda, \alpha t, 0)}{\psi_u(\lambda, \alpha t, 0)} \right]_{\lambda=\lambda_u(\alpha t)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \left| \lim_{n \to \infty} \sum \frac{\lambda_u^n(\alpha t) n^{m_u-1} (\lambda_u(\alpha t) - \lambda_u(0))^{m_u}}{\lambda_u(\alpha t) - 1} \prod_{v \neq u} \frac{(\lambda_u(\alpha t) - \lambda_v(0))^{m_v}}{(\lambda_u(\alpha t) - \lambda_v(\alpha t))^{m_v}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \left| \lim_{n \to \infty} \sum \frac{n^{m_u} (\lambda_u(\alpha t) - \lambda_u(0))^{m_u}}{(\lambda_u(\alpha t) - 1) n} \cdot \exp\left[(\lambda_u(\alpha t) - 1) n\right] \right| = 0,$$

так как $\mathrm{Reel}\,(\lambda_u(\alpha t) - 1) \asymp \lambda_u(0) - 1$ для $u \geqslant 2$, что легко получить, применяя лемму 6.

3. Теоремы 2 и 5, по существу, уже доказаны. Не ясно только, можно ли пользоваться формулами для вычисления a_w и b_w, приведенными в формулировке теорем, если применялась лемма 11. Оказывается, что можно. Из вероятностного смысла P_{s-v} следует, что $D_{s-v} - D^*_{s-v} = o(D_{s-v})$. С другой стороны,

$$D_s(\alpha t, 0) = (1 - e^{i\alpha t}) D'_{s-1},$$

$$D_{s-v}(\alpha t, 0) = e^{i\alpha t} D_{s-v} + (1 - e^{i\alpha t})(D'_{s-v} + D'_{s-v-1}).$$

4. Как следует из результатов пункта 2 этого параграфа, при вычислении предела х.ф. в случае теоремы 4 надо учитывать только один ко-

рень х.у. Пусть выполнены условия теоремы 4. Из леммы 6 имеем, что

$$-c < \frac{\alpha^{\nu} N_{\nu}(\theta)}{D_{s-1}} < c; \quad \nu = \overline{1, s-1},$$

$$\frac{(\theta_{\alpha})^{k} D_{s-k-1}}{D_{s-1}} < c; \quad k = \overline{1, s-1}.$$

Так же, как при доказательстве теоремы 6, выбираем подпоследовательность $n_u \to \infty$, по которой существуют пределы этих величин. Но тогда по нашей подпоследовательности существует предел

$$\lim_{n_u \to \infty} \frac{\sum_{v=1}^{s} C_{v,1}(\lambda(\alpha t), \alpha t, \theta)}{\psi_1(\lambda, (\alpha t), \alpha t, \theta)} = \frac{1 + \sum_{u=1}^{s-1} (it)^u c_u}{1 + \sum_{v=1}^{s-1} (it)^v b_v}.$$

Так как мы учитываем только $\lambda_1(\alpha t)$,

$$\overline{f}(t) = \lim_{n_u \to \infty} f(\alpha t) = \frac{1 + \sum_{u=1}^{s-1} (it)^u c_u}{1 + \sum_{v=1}^{s-1} (it)^v b_v} \exp\left[- \frac{\lim_{n_u \to \infty} \frac{n D_s(\alpha t, \theta)}{D_{s-1}}}{1 + \sum_{w=1}^{s-1} (it)^w b_w} \right].$$

Следовательно, существует

$$\lim_{n_u \to \infty} \frac{n_u D_s(\alpha t, \theta)}{D_{s-1}} = g(t). \tag{4.4}$$

В дальнейшем мы докажем, что $g(t)$ — многочлен по t степени не выше s. Этот результат можно было бы получить, анализируя формулу (4.4). В каждом конкретном случае это не так уж трудно сделать. Но в общем случае при $s \geqslant 4$ выкладки слишком громоздки. Поэтому мы прибегнем к качественным рассмотрениям. При этом мы докажем даже нечто большее:

Лемма 12. *Степень $g(t)$ или равна степени*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{D_{s-1}(\alpha, t, \theta)}{D_{s-1}}$$

или превосходит ее на один или два.

Вероятностный смысл этой леммы будет выяснен в процессе ее доказательства, которое мы проведем методом индукции по s. Для $s = 2$ утверждение леммы проверяется непосредственно. Это I, IV, V случаи у Р. Л. Добрушина [1]. Предположим теперь, что лемма доказана для $s - 1$ возможных состояний. Пусть μ^u — число попаданий в E_u в n-ой серии испытаний при условии, что в начальный (нулевой) момент времени система находилась в E_1. Доказательство утверждения леммы 12 мы проведем в предположении, что для каждого u существуют α_u и θ_v такие, то

$$\alpha_u(\mu^u - n\theta_u)$$

имеет в пределе собственное распределение. Как будет видно из дальнейшего, это предположение не нарушает общности, позволяя вместе с тем более сжато провести изложение. Различные случаи соотношений между α_u, θ_u, $u = \overline{1, s}$ представим в виде схемы:

Схема 2

<table>
<tr><td>$\alpha_1 n\theta_1 = O(1)$</td><td colspan="2"></td><td>I</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\alpha_1 n\theta_1 \to \infty$
$(n \to \infty)$</td><td>$\alpha_1 = o(\max\limits_u \alpha_u)$</td><td colspan="2">II</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\alpha_1 \asymp \max\limits_u \alpha_u$</td><td>$\alpha_1 \asymp \min \alpha_u$</td><td>III</td></tr>
<tr><td>$\min \alpha_u = o(\alpha_1)$</td><td>IV</td></tr>
</table>

Будем продвигаться по схеме слева направо. Если выполнены условия, подводящие к I, или короче, выполнены условия I, то предельное распределение может быть найдено при $\theta_1 = 0$. Но тогда предельная х.ф. имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{1 - itb} \exp\left[-\frac{ita}{1 - itb}\right],$$

где

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha n D'_{s-1}}{D_{s-1}}; \quad b = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha D'_{s-2}}{D_{s-1}}.$$

Итак, в этом случае лемма верна. В случае выполнения условий II построим новую цепь Маркова с меньшим, чем s, числом возможным состояний, но для которой предельное распределение для $\alpha_1^*(\mu^{*1} - n\theta_1^*)$ будет то же, что и в первой цепи. Эту цепь строим следующим образом. Пусть состояния, для которых $\alpha_u \asymp \max\limits_v \alpha_v$, занимают l последних строк и столбцов в матрице P, и пусть $q_{u,v}$; $u = \overline{s - l + 1, s}$; $v = 1, s - l$ — условная вероятность того, что, находясь в нулевой момент времени в E_u, система, впервые выйдя из последних l состояний, попадет в E_v. Новую цепь Маркова задаем матрицей $P^* = \| p^*_{u,v} \|_{u,v=1}^{s-l}$

$$p^*_{u,v} = p_{u,v} + \sum_{w=s-l+1}^{s} p_{u,w} q_{w,v}$$

и считаем, что в n-ой серии происходит $n\left(1 - \sum\limits_{v=s-l+1}^{s} \theta_v\right)$ испытаний. Поскольку время, проведенное системой в последних l состояниях первой цепи, совпадает с точностью до $o(\alpha^{-1})$ с $n \sum\limits_{v=s-l+1}^{s} \theta_v$, предельное распределение $\alpha_1\left(\mu^{*1} - n\left(1 - \sum\limits_{v=s-l+1}^{s} \theta_v\right)\theta_1\right)$ будет совпадать с предельным распределением

$\alpha_1(\mu^1 - n\theta_1)$. Пусть теперь выполнены условия III. Нам будет удобно выделить два частных случая. Первый случай, когда для всех u

$$\alpha n\theta_u \to \infty \quad (n \to \infty). \tag{4.5}$$

Второй случай, когда для $u \geqslant 2$

$$\alpha n\theta_u = O(1). \tag{4.6}$$

Мы докажем, что в первом случае предельным для $\alpha(\mu^1 - n\theta_1)$ будет нормальный закон. Во втором случае, когда выполнено условие (4.6), положим $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = \theta_3 = \ldots = \theta_s = 0$. Очевидно, для любого

$$\tau^{\tau}_{1i,u} = o(1).$$

Можно считать, что $1 - p_{u,u} \asymp \alpha$; $u \geqslant 2$. В противном случае строим цепь с меньшим числом возможных состояний, для которой предельное распределение $\alpha(\mu^* - n)$ будет то же, что и в первой цепи. Согласно предположению, для $k \leqslant s - 1$ лемма верна. Итак, $1 - p_{u,u} \asymp \alpha$; $u \geqslant 2$, но тогда

$$D_{s-k}(\alpha t,\ 1) \asymp \alpha^{s-k},$$

$$D'_{s-k}(\alpha t,\ 1) \asymp \frac{1}{n}\,\alpha^{s-k},$$

что и доказывает утверждение леммы. Отложим разбор случая, когда выполнено условие (4.5) до конца этого параграфа. Сейчас же покажем, как результаты этих частных случаев можно применить к исследованию общего случая. Будем называть состояния, для которых справедливо (4.5), высоковероятными, а состояния, для которых справедливо (4.6), маловероятными. Переход из высоковероятных состояний в маловероятные должен быть возможен только за время, не меньшее n, иначе маловероятные состояния были бы высоковероятными. Отсюда следует, что высоковероятные состояния в совокупности ведут себя по отношению к выходу в маловероятные состояния так же, как E_1 во втором случае. С другой стороны, распределение общего времени, проведенного в высоковероятных состояниях, по отдельным состояниям подчиняется так же, как в первом случае, нормальному закону. Следовательно, предельное распределение $\alpha(\mu - n\theta)$ будет композицией законов, возникающих в двух выделенных частных случаях. Поскольку во втором случае х.ф. предельного закона имеет вид

$$f(t) = \exp\frac{ita_1 + \ldots + (it)^m a_m}{1 + itb_1 + \ldots + (it)^m b_m},$$

где m меньше числа маловероятных состояний, доказательство леммы 12 в случае выполнения условий III будет закончено, как только мы покажем, что в первом выделенном случае $\alpha(\mu - n\theta)$ имеет в пределе нормальное распределение. Заметим здесь же, что случай IV разбирается аналогично III.

Пусть для всех u выполнено условие (4.5). Введем функции $\beta_u = \beta_u(n)$

и $q_u = q_u(n)$ такие, что β_u: $\eta_{u,1}^{\beta_u^{-1}} \asymp 1$, для $\tau = o(\beta_u^{-1})$, $\eta_{u,1}^{\tau} = o(1)$, q_u — вероятность, что цикл, начинающийся в E_1, пройдет через E_u. Тогда

$$\alpha = O\left(\frac{\beta_u}{\sqrt{nq_u\theta_1}}\right). \tag{4.7}$$

Действительно, перейти из E_u в E_1 система может, только проведя в E_u время, сравнимое с β_u^{-1}. Если бы это было не так, то существовало бы v такое, что для некоторого $\tau = o(\beta_u^{-1})$ $\eta_{u,v}^{\tau} \asymp 1$ и из E_v можно было бы перейти в E_1 только проведя в E_v время, сравнимое с β_u^{-1}, а это противоречит условию $\alpha_u = \alpha_u = \alpha$: попадаем из E_1 в E_v не меньшее по порядку число раз, чем из E_1 в E_v, а проводим в E_v до выхода в E_1 время большее, чем в E_u. В E_1 с точностью до $O(\alpha^{-1})$ система проводит время $n\theta_1$. Следовательно, число циклов, проходящих через E_u, будет асимптотически равно $q_u n\theta_1$. Обозначим ν_w число попаданий в E_u во время w-го цикла, начинающегося в E_1. Тогда

$$\mu^u = \nu_1 + \nu_2 + \overset{\tau}{\ldots} + \nu_{\mu^1},$$

откуда и следует (4.7).

Применим теперь метод Колмогорова — Деблина

$$\mathbf{P}\{\alpha(\mu - n\theta) < x\} = \mathbf{P}\{\mu < \alpha^{-1}x + n\theta\} =$$

$$= \mathbf{P}\left\{\sum_{v=1}^{\alpha^{-1}x+n\theta+1} \chi_v > n\right\} = \mathbf{P}\left\{\sum_{v=1}^{\alpha^{-1}x+n\theta+1} (\mathbf{M}\chi - \chi_v) < n + M\chi\cdot(\alpha^{-1}x + n\theta + 1)\right\} =$$

$$= \mathbf{P}\left\{\sum_{v=1}^{\alpha^{-1}x+n\theta+1} \alpha\left(1 - \frac{\chi_v}{\mathbf{M}\chi}\right) < x + \alpha n\left(\theta - \frac{1}{\mathbf{M}\chi}\right) + \alpha\right\}.$$

Используя формулы (2.5), (2.6), (2.7), оценим $\mathbf{D}\chi$:

$$\mathbf{D}\chi \leqslant c\sum_{u=2}^{s} q_u \frac{1}{\beta_u^2},$$

где c некоторая постоянная. Из (4.7) следует, что

$$n\theta_1 \mathbf{D}(\alpha\chi) \leqslant cn\theta_1\alpha^2 \sum_{u=2}^{s} q_u \frac{1}{\beta_u^2} = O(1). \tag{4.8}$$

С другой стороны, обозначая $F_\chi(x)$ функцию распределения χ, имеем

$$\int_{|x|>\varepsilon\alpha^{-1}} x^2 dF_\chi(x) \leqslant 3(\alpha^{-1}\varepsilon)^2 \sum_{u=2}^{s} q_u \exp(-\varepsilon\alpha^{-1}\beta_u). \tag{4.9}$$

Из (4.8) и (4.9) заключаем, что

$$\sum_{v=1}^{\alpha^{-1}x} \left(1 - \frac{\chi_v}{\mathbf{M}\chi}\right)$$

сходится по вероятности к нулю, а

$$\sum_{v=1}^{n\theta}\left(1-\frac{\chi_v}{\mathbf{M}\chi}\right)$$

сходится к нормальному закону, так как выполнено условие Линдеберга. Итак, наше утверждение доказано. Попутно мы получили, что можно взять $\theta_1 = p_1$.

§ 5. Примеры

1. Рассмотрим цепь, задаваемую матрицей вероятностей перехода

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 1-\frac{1}{2n^{\gamma}} & \frac{1}{2n^{\gamma}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2n^{\delta}} & 0 & 0 & 1-\frac{1}{2n^{\delta}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Если в начальный момент времени система находится в E_1, то в дальнейшем она сможет попадать в E_1 только в четные моменты времени. При $\gamma = \delta = 0$, очевидно, применима теорема 3, при $0 < \gamma,\ \delta < 1$ — теорема 4, при $\gamma = \delta = 1$ — теорема 5. Предположим, что $\alpha(\mu - n\theta)$ слабо сходится при $n \to \infty$ к собственному закону с функцией распределения $F(x)$. Наш пример показывает, что простейшая локализация теорем 3—5, утверждающая, что при $n \to \infty$ равномерно относительно k в интервале $0 \leqslant k < \infty$

$$\alpha^{-1}\left|\mathbf{P}(\mu = k) - F\left(\alpha\left(k+\frac{1}{2}-n\theta\right)\right) + \right.$$
$$\left. + F\left(\alpha\left(k-\frac{1}{2}-n\theta\right)\right)\right| \to 0$$

невозможна.

2. Ниже будут рассмотрены примеры, иллюстрирующие теоремы 4—5. Для большей наглядности мы обратимся к многомерным предельным законам. Обозначим μ^i число попаданий в E_l в n-ой серии испытаний при условии, что в начальный момент времени система находится в E_1. Нас будет интересовать предельное распределение вектора $\{\alpha_l(\mu^i - n\theta_i);\ i = \overline{1,s}\}$. Его х.ф. дается формулой, полностью аналогичной (2.1). Отличие между ними только в том, что теперь вместо матрицы $A(t,\ \theta)$ рассматривается матрица

$$A(\alpha_1 t_1, \ldots, \alpha_s t_s,\ \theta_1 \ldots \theta_s) = \| p_{kl} e^{iz_l} \|_{k,l=1}^{s},$$

где

$$z_l = \alpha_l t_l - \sum_{u=1}^{s} \alpha_u \theta_u t_u.$$

Пусть

$$P=\begin{vmatrix} 1-\frac{1}{n} & \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & 1-\frac{a}{n^\gamma} & \frac{a}{n^\gamma} \\ \frac{b}{n} & 0 & 1-\frac{b}{n} \end{vmatrix}, \quad 0<\gamma<1.$$

Так как $\frac{D_{s-2}}{nD_{s-1}} \asymp 1$, $\frac{D_{s-3}}{nD_{s-2}} = o(1)$, нам надо учитывать два корня х.у. Согласно лемме 7 полагаем $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$. Учитывая, что в E_1 и E_3 система проводит время, сравнимое с n, полагаем $\alpha_1 = \alpha_3 = \frac{1}{n}$. По тем же соображениям берем $\alpha_2 = \frac{1}{n^\gamma}$. Теперь составляем уравнение, аналогичное (1.6),

$$z^2(a-it_2)+z(a-it_2)(1+b-it_1-it_3)+(1-it_1)(a-it_2)(b-it_3)- \\ -ab=0. \tag{5.1}$$

Откуда

$$\bar{f}(t_1,\ t_2,\ t_3)=\sum_{u=1}^{2}\frac{z_u(a-it_2)+(a-it_2)(b-it_3)-a}{2z_u(a-it_2)+(a-it_2)(b-it_3-it_1+1)}e^{z_u},$$

где z_1, z_2 — решения уравнения (5.1).

$\bar{f}(t_1, t_2, t_3)$ — это х.ф. случайного вектора $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$, где ζ_2 — сумма случайного числа независимых, одинаково распределенных слагаемых, каждое из которых имеет показательное распределение с параметром a

$$\zeta_2=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_\nu;$$

ζ_1, ζ_3, ν есть, соответственно, время, проведенное в E_1, время, проведенное в E_3, и число попаданий в E_2 за единицу времени в цепи Маркова с непрерывным временем, имеющей три возможных состояния E_1, E_2, E_3, одно из которых E_2 — мгновенное. Эта цепь задается плотностями вероятностей перехода $q_{u,v}$ из E_u в E_v и вероятностями перескока из E_2 в E_1 и E_2, соответственно, q_1 и q_2.

$$q_{1,2}=1,\ q_{1,3}=0,$$
$$q_{3,1}=b,\ q_{3,2}=0,$$
$$q_1=0,\quad q_2=1.$$

Замечание. Строя соответствующие непрерывные аналоги и применяя методы, развитые А. В. Скороходом [11], можно заново получить теоремы 2 и 5. Хотя при этом потребуется не меньшая вычислительная работа, зато открывается возможность рассматривать локальные теоремы по подпоследовательностям. Мы не останавливаемся на этом более подробно.

3. Пусть P имеет вид

$$P = \begin{vmatrix} 1-\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{a_1}{n} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{a_3}{n} & \frac{a_4}{n} & \dots & \frac{a_s}{n} \\ 1-\frac{b_1}{n} & 0 & \frac{b_3}{\sqrt{n}} & \frac{b_4}{\sqrt{n}} & \dots & \frac{b_s}{\sqrt{n}} \\ \frac{c_{3,1}}{n^\gamma} & \frac{c_{3,2}}{n^\gamma} & 1-\frac{c_{3,3}}{n^\gamma} & \frac{c_{3,4}}{n^\gamma} & \dots & \frac{c_{3,s}}{n^\gamma} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{c_{s,1}}{n^\gamma} & \frac{c_{s,2}}{n^\gamma} & \frac{c_{s,3}}{n^\gamma} & \frac{c_{s,4}}{n^\gamma} & \dots & 1-\frac{c_{s,s}}{n^\gamma} \end{vmatrix},$$

где a_u, b_u, c_u — некоторые постоянные, удовлетворяющие соотношениям

$$a_1 = \sum_{u=3}^{s} a_u,\quad b_1 = \sum_{u=3}^{s} b_u,\quad c_{uu} = \sum_{v\neq u} c_{uv},$$

$$n^{\gamma(s-2)} P_{s-2}^{1,2} = 1 + o(1). \tag{5.2}$$

Будут отдельно рассмотрены случаи $0<\gamma<\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}<\gamma<1$, $\gamma=\frac{1}{4}$. При таких предположениях относительно γ $\overline{P}$ соответствует цепь, состоящая из $(s-1)$ класса существенных состояний, и выполнено условие (1.4). Следовательно, в этом случае применима теорема 4. Прежде чем приступать к вычислениям, заметим, что при любом γ система проводит в E_1 время, сравнимое с n, а в E_2 время, сравнимое с $\sqrt{n}$. Если бы $a_1=b_1=0$, то по теоремам 7 и 3 случайная величина $\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}(\mu^1 - n + \sqrt{n})$ имела бы в пределе нормальное распределение. Поэтому мы положим

$$\theta_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}},\quad \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Число переходов из E_1 и E_2 в $\bigcup_{u=3}^{s} E_u$ подчиняется в пределе пуассоновскому закону с параметром (a_1+b_1), поэтому положим $\theta_3=\theta_4=\dots=\theta_s=0$. В $\bigcup_{u=3}^{s} E_u$ до выхода в E_1 система проводит время, сравнимое с n^γ, поэтому берем $\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=\dots=\alpha_s=\frac{1}{n^\gamma}$, $\alpha_1=\min\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}, \frac{1}{n^\gamma}\right)$, $\alpha_2=\min\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}, \frac{1}{n^{-\frac{1}{2}+\gamma}}\right)$. Предел х.ф. ищем в виде

$$\overline{f}(t_1, t_2, \dots, t_s) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{u=1}^{s} C_{u,1}(\lambda_1(\dots), \alpha_1 t_1 \dots \theta_1 \dots)}{\psi_1(\lambda_1(\alpha_1 t_1 \dots \alpha_s t_s), \alpha_1 t_1 \dots \theta_1 \dots)} e^{\lim n(\lambda(\dots)-1)}.$$

Первый из этих пределов равен единице. В силу (5.2) окончательно имеем

$$\overline{f}(t_1, t_2, \ldots, t_s) = \exp \frac{\left| \begin{array}{l} a_1 + b_1 - \delta \frac{(t_1 - t_2)^2}{2} - a_3 - b_3, \ldots, -a_s - b_s \\ -c_{31} - c_{32} \\ \cdots\cdots \\ -c_{s1} - c_{s2} \end{array} \right| W(t_1, t_2, \ldots, t_s) \Big|}{|W(t_1, t_2, \ldots, t_s)|},$$

где

$$W(t_1, \ldots, t_s) = \begin{vmatrix} c_{33} + it_3 - i\beta(t_1 + t_2) & c_{34} & \ldots & -c_{3s} \\ -c_{43} & c_{44} + it_4 - i\beta(t_1 + t_2) & \ldots & -c_{4s} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ -c_{s3} & -c_{s4} & \ldots & c_{ss} + it_s - i\beta(t_1 + t_2) \end{vmatrix}.$$

Итак, мы получили, что

а) при $0 < \gamma < \frac{1}{4}$ в пределе $\alpha_1(\mu^1 - n\theta_1)$ не зависит от вектора $\{\alpha_k \mu^k; k = \overline{3,s}\}$ и нормально;

б) при $\frac{1}{4} < \gamma < 1$ в пределе $\alpha_1(\mu^1 - n\theta_1)$ совпадает с $-\sum_{k=3}^{s} \alpha_k \mu^k$,

в) при $\gamma = \frac{1}{4}$ предельное распределение $\alpha_1(\mu^1 - n\theta_1)$ есть суперпозиция нормального закона и распределения суммы $-\sum_{k=3}^{s} \alpha_k \mu^k$.

Поступила в редакцию
21.2.58

ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Л. Добрушин, Предельные законы для цепей Маркова, Изв. АН СССР, сер. матем., **17**, № 4. (1953).
[2] Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, ГИТТЛ, 1954, Москва.
[3] Н. А. Дмитриев и Е. Б. Дынкин, ДАН СССР, **49** (1945), 159—162.
[4] А. А. Ильяшенко, Предельные законы для цепей Маркова. Диссертация на соискание ученой степени канд. ф.-м. наук.
[5] Ф. И. Карпелевич, Изв. АН СССР, Сер. матем., **15** (1951), 361—383.
[6] А. Н. Колмогоров, Цепи Маркова со счетным множеством возможных состояний. Бюллетень МГУ, **I**, вып. 3 (1937).
[7] G. Mihoc et O. Onicescu, Les chaines de variables aléatoires—problèmes asymptotiques, Acad. Roumaine, Bucuresti, **14** (1943).
[8] В. И. Романовский, Дискретные цепи Маркова. ГИТТЛ, 1949, М.
[9] Т. А. Сарымсаков, Основы теории процессов Маркова. ГИТТЛ, 1954, Москва.
[10] С. Х. Сираждинов, Предельные теоремы для однородных цепей Маркова. Изд. АН УзССР, Ташкент, 1955.
[11] А. В. Скороход, Теория вероят. и ее примен., **I**, вып. 3 (1955).

LIMIT THEOREMS FOR MARKOV CHAINS WITH A FINITE NUMBER OF STATES

L. D. MESHALKIN (*MOSCOW*)

(Summary)

Consider the scheme of trial sequences

$$\begin{array}{l} \nu_{11} \\ \nu_{21},\ \nu_{22} \\ \cdots\cdots \\ \nu_{n1},\ \nu_{n_2},\ \ldots,\nu_{nn} \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

The sequence $\nu_{nk}\,(k=\overline{1,\,n})$ is a uniform Markov chain with a finite number of states $E_1 \ldots E_s$ and a given matrix of transition probabilities

$$P = P(n) = \| p_{uv}(n) \|_{u,v=1}^{s}$$

Let $\mu = \mu(n)$ denote the number of passages up in the n-th sequence of trials of the system through E_1 on condition that the system is in state E_1 at the initial (or zeroth) time. We consider the limit distribution for a sequence of random variables

$$\alpha(\mu - n\theta), \quad \alpha = \alpha(n); \quad \theta = \theta(n).$$

Theorems 1—5 give characteristic functions for some possible limit distributions.

The main result of this paper is Theorem 6:

If the limit distribution for $\alpha(\mu - n\theta)$ *exists, then it does not differ from one of those found in theorems* 1—5 *by more than a linear transform.*

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том III И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 4*
1958

CONTINUOUS GENERALIZATIONS OF TCHEBICHEV'S INEQUALITY

BY. P. WHITTLE

Summary

Given a random function $x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ for which one knows only $\mathbf{E}[x(t)]$ and, $\mathbf{E}[x(s)\,x(t)]$, $(0 \leqslant s,\ t \leqslant 1)$, a bound is presented in the section 3° for the probability that $|x(t)|$ anywhere exceeds a given function $\alpha(t)$. The bound involves an arbitrary quadratic form, and can be specialised in various ways, (see formula (30) for a specific example), the most appropriate specialisation depending upon the degree of differentiability of $x(t)$. The case where is a function of several variables $t_1,\ t_2, \ldots, t_m$ is considered in the two final sections.

1. It was shown in a previous publication [4] that if we have a set of random variables $x_1, x_2, \ldots, x_N$ for which

$$\mathbf{E}[x_j] = 0 \tag{1}$$

$$\mathbf{E}[x_j x_k] = v_{jk} \quad (j, k = 1, 2, \ldots, N) \tag{2}$$

and

$$1 - P = \text{prob}[|x_j| \leqslant \alpha_j;\ j = 1, 2, \ldots, N] \tag{3}$$

then

$$P \leqslant \min(1, \operatorname{tr} V B^{-1}). \tag{4}$$

Here V is the matrix (v_{jh}), and B any positive definite symmetric matrix whose diagonal elements are specified by

$$b_{jj} = \alpha_j^2 \quad (j = 1, 2, \ldots, N). \tag{5}$$

Furthermore, it was shown that if V is positive definite, and B is the solution (unique, if the conditions required above are satisfied) of

$$V = B\Lambda B \tag{6}$$

where Λ is a diagonal matrix of Lagrangian multipliers, then inequality (4) is sharp. That is, a distribution of $x_1, x_2, \ldots, x_N$ can be found, having first and second moments specified by (1), (2), for which the equality holds in (4).

This result seems to constitute a natural generalisation of Tchebichev's inequality to the multivariate situation. In this paper we shall attempt to extend the result to the case of a random function $x(t)$, i. e. we shall attempt to derive an upper bound for P, where

$$1 - P = \text{prob}[|x(t)| \leqslant \alpha(t);\ 0 \leqslant t \leqslant 1] \tag{7}$$

from a knowledge of the first and second moments of the ordinates $x(t)$ alone.

2. Instead of proceeding directly to the case of a function $x(t)$, it is instructive to apply first the results of the previous section to a discrete set of ordinates such as

$$x_j^{(N)} = x\left(\frac{j}{N}\right) \quad (j = 1, 2, \ldots, N) \tag{8}$$

and then see to what extent results obtained by proceeding to the limit $N \to \infty$ are valid for the complete function.

We shall assume

$$\mathbf{E}[x(t)] = 0 \tag{9}$$

$$\mathbf{E}[x(s)\,x(t)] = v(s, t) \quad (0 \leqslant s,\ t \leqslant 1) \tag{10}$$

$$v\left(\frac{j}{N}, \frac{k}{N}\right) = v_{jk}^{(N)}. \tag{11}$$

Provided $\alpha(t)$ is nowhere zero we can always reduce the problem to the case $\alpha(t) = \text{constant}\,\alpha$ by working with the function $\alpha x(t)/\alpha(t)$ instead of $x(t)$. It will be assumed that this normalisation has been performed in what follows, unless the contrary is stated.

In general it will not be practicable to calculate the optimum matrix B satisfying (6), which is unfortunate in that the choice of B must be made judiciously if the bound $\mathrm{tr}\,VB^{-1}$ is not to become indefinitely large as N increases. To see this, consider the following choice for B proposed by Lal [1]:

$$B = \alpha^2 \begin{bmatrix} 1 & \beta & \beta & \ldots & \beta \\ \beta & 1 & \beta & \ldots & \beta \\ \beta & \beta & 1 & \ldots & \beta \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta & \beta & \beta & \ldots & 1 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

This matrix has the correct diagonal elements, and will be positive definite provided that

$$-\frac{1}{N-1} < \beta < 1. \tag{13}$$

If we define v and ρ by

$$v = \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} v_{jj}^{(N)} \tag{14}$$

$$v\rho = \frac{1}{N^2}\sum_{1}^{N}\sum_{1}^{N} v_{jk}^{(N)}, \tag{15}$$

then we find

$$\mathrm{tr}\,VB^{-1} = \frac{Nv}{\alpha^2(1-\beta)} \cdot \frac{1+\beta[N(1-\rho)-1]}{1+\beta(N-1)} =$$

$$= \frac{Nv(1-\rho)}{\alpha^2} + \frac{Nv}{\alpha^2(1-\beta)} \cdot \frac{(1-\beta)+\rho(1-\beta)^2+N(1-\rho)\beta^2}{1+\beta(N-1)} > \frac{Nv(1-\rho)}{\alpha^2}. \tag{16}$$

If $v(1-\rho)$ tends to a non-zero limit as N increases, then $\mathrm{tr}\,VB^{-1}$ increases indefinitely, and equation (4) yields no finite bound.

It may happen that $\operatorname{tr} VB^{-1}$ has no finite limit even when the optimum B is chosen (see § 6 of the present paper, and § 6 of [4]). In this case the function $x(t)$ is too irregular to permit the construction of a finite Tchebichev bound.

One can see intuitively that the choice

$$B = \alpha^2(\beta^{|j-k|}) \quad (|\beta| < 1) \tag{17}$$

is likely to be a good one, since in this case

$$B^{-1} = \alpha^{-2}(1-\beta^2)^{-1} \begin{vmatrix} 1 & -\beta & 0 & \dots & 0 \\ -\beta & 1+\beta^2 & -\beta & \dots & 0 \\ 0 & -\beta & 1+\beta^2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix} \tag{18}$$

and $\operatorname{tr} VB^{-1}$ will be made up of differences of $v_{jk}^{(N)}$ around $j=k$, which will be relatively small if $x(t)$ possesses an appreciable degree of autocorrelation. In fact, if we set

$$\beta = e^{-\theta/N} \tag{19}$$

then we find by a formal passage to the limit that

$$M = \lim_{N\to\infty} \operatorname{tr} VB^{-1} =$$

$$= \frac{v(0,0)+v(1,1)}{2\alpha^2} + \frac{1}{2\theta\alpha^2}\int_0^1 \left[\theta^2 v(t,t) + \left[\frac{\partial^2 v(s,t)}{\partial s \partial t}\right]_{s=t}\right] dt. \tag{20}$$

It will be our aim in the following sections to mustify this and similar results, i. e. to determine the conditions under which $P \leqslant M$, where P, M are defined by equations (7) and (20) respectively.

Assuming the validity of the result we have then

$$P \leqslant \frac{\varphi^2(0)+\varphi^2(1)}{2\alpha^2} + \frac{1}{2\theta\alpha^2}\int_0^1 [\theta^2\varphi^2(t) + \psi^2(t)]\, dt \tag{21}$$

where

$$\varphi^2(t) = v(t,t), \tag{22}$$

$$\psi^2(t) = \left[\frac{\partial^2 v(s,t)}{\partial s \partial t}\right]_{s=t}. \tag{23}$$

Thus, one condition at least is necessary if (21) is to yield a finite bound for P; the function $x(t)$ must be sufficiently regular that the second differential coefficient (23) is finite for almost all t. This rules out processes with covariance functions such as

$$v(s,t) = e^{-|s-t|}. \tag{24}$$

Inequality (21) can be sharpened if we minimise the right-hand member with respect to θ, obtaining

$$P \leqslant \frac{\varphi^2(0)+\varphi^2(1)}{2\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2}\left[\int_0^1 \varphi^2(t)\, dt \int_0^1 \psi^2(t)\, dt\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{25}$$

It can be further improved if we change the scale of t in a suitable fashion, i. e. if to begin with we choose the ordinates $x_j^{(N)}$ in some way

other than (8). If the corresponding quantities in the two scales are t, φ, ψ and T, Φ, Ψ then it follows from the definitions (22), (23) that

$$\Phi(T) = \varphi(t), \tag{26}$$

$$\Psi(T) = \psi(t)\frac{dt}{dT}, \tag{27}$$

so that

$$\int \Phi^2(T)\,dT \int \Psi^2(T)\,dT = \int \varphi^2(t)\left(\frac{dT}{dt}\right)dt \int \psi^2(t)\left(\frac{dt}{dT}\right)dt \geqslant \left[\int \varphi(t)\psi(t)\,dt\right]^2, \tag{28}$$

equality holding when T is determined by

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}. \tag{29}$$

The final inequality thus becomes

$$P \leqslant \frac{\varphi^2(0) + \varphi^2(1)}{2\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2}\int_0^1 \varphi(t)\psi(t)\,dt. \tag{30}$$

3. Consider a symmetric bilinear functional $S(x, y)$ of the functions $x(t)$, $y(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ satisfying

$$S(x, x) > 0 \tag{31}$$

for non-zero x.

An operator A is then implicitly defined by the relation

$$S(x, x) = \int_0^1 |Ax(t)|^2\,dt. \tag{32}$$

Suppose that there is an integral operator B such that

$$Bx(t) = \int_0^1 B(t, s)\,x(s)\,ds, \tag{33}$$

and that B is effectively inverse to A^*A in the sense that if

$$Y_s(t) = B(t, s) \tag{34}$$

then

$$S(x, y_s) = x(s) \tag{35}$$

for all x for which $S(x, x)$ exists. In particular

$$S(Y_s, Y_s) = B(s, s). \tag{36}$$

Theorem. *If the functional $S(x, y)$ and the operator B have the properties indicated immediately above, and $x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ is a random function, then*

$$\text{prob}\,[|x(t)|^2 \leqslant B(t, t);\quad 0 \leqslant t \leqslant 1] \geqslant 1 - \mathbf{E}\,[S(x, x)]. \tag{37}$$

Proof. If, for a particular $x(t)$, $S(x, x)$ is well defined, then by Schwarz's inequality

$$S(x, x)\,S(Y_t, Y_t) \geqslant |S(x, y_t)|^2 \tag{38}$$

or

$$S(x, x) \geqslant \frac{x^2(t)}{B(t, t)} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{39}$$

If $S(x, x)$ is not well defined then we assign it the value $+\infty$. Thus, if $x(t)$ does not satisfy the relation

$$x^2(t) \leqslant B(t, t) \tag{40}$$

for all t in (0, 1) then

$$S(x, x) > 1. \tag{41}$$

We have then

$$\text{prob}\,[|x(t)|^2 \leqslant B(t,t);\ 0 \leqslant t \leqslant 1] \geqslant 1 - \text{prob}\,[S(x,x) > 1] \geqslant 1 - \mathbf{E}\,[S(x,x)], \tag{42}$$

which is the required result.

It will be noted that the above argument avoids explicit consideration of the operators A and A^*A. This is because, while there is no ambiguity in the determination of the operators from the functional S, the converse is not true.

4. Consider the following choice of S, motivated by expression (20):

$$S(x, y) = \frac{x(0)\,y(0) + x(1)\,y(1)}{2\alpha^2} + \frac{1}{2\theta\alpha^2}\int_0^1 [\theta^2 x(t)\,y(t) + x'(t)\,y'(t)]\,dt. \tag{43}$$

$S(x, x)$ is plainly positive for all non-zero x, and equations (34), (35) are satisfied by

$$B(t, s) = \alpha^2 e^{-\theta|t-s|}. \tag{44}$$

The theorem of the previous section is then valid, so that if P is the probability that $|x(t)|$ is greater than α anywhere in (0, 1), then

$$P \leqslant \mathbf{E}\,[S(x, x)]. \tag{45}$$

The problem is now, to determine conditions under which $\mathbf{E}\,[S]$ is equal to expression (20). The following conditions are certainly sufficient:

$$\text{(i)}\ \ \mathbf{E}\,[x(t)]^2 < \infty \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

$$\text{(ii)}\ \ x'(t) \text{ exists and } \mathbf{E}\,[x'(t)]^2 < \infty \quad (0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{46}$$

For, it follows from (ii) and the dominated convergence theorem (see, for example [2], p. 126) that

$$\mathbf{E}\,[x'(t)]^2 = \lim_{h \to 0} \mathbf{E}\left[\frac{x(t+h) - x(t)}{h}\right]^2 = \left[\frac{\partial^2 v(s, t)}{\partial s \partial t}\right]_{s=t}, \tag{47}$$

and from (i), (ii) that

$$\mathbf{E}\int_0^1 [\theta^2 x^2 + (x')^2]\,dt = \int_0^1 \mathbf{E}\,[\theta^2 x^2 + (x')^2]\,dt \tag{48}$$

since the right-hand member is finite and the integral absolutely convergent. From (47) and (48) the equality of $\mathbf{E}\,(S)$ and expression (20) follows.

As an example of a case where attention to these conditions is necessary, suppose that a function $x(t)$ satisfying the conditions is modified by changing a particular ordinate $x(s)$ to $x(s) + d$, where s is chosen randomly in (0, 1) and d is finite but greater than 2α. The modified process has the same covariances as $x(t)$, but P is now unity under all circumstances. It is, of course, condition (ii) which has been violated.

Note that, since (43) can be written

$$S(x,y)=\frac{y(0)[\theta x(0)-x'(0)]+y(1)[\theta x(1)+x'(1)]}{2\theta\alpha^2}+$$

$$+\frac{1}{2\theta\alpha^2}\int_0^1 y(t)[\theta^2 x(t)-x''(t)]\,dt. \tag{49}$$

the equation

$$S(x,y)=\int z(t)\,y(t)\,dt \quad \text{(all } y\text{)} \tag{50}$$

or

$$A^*Ax=z \tag{51}$$

can be written

$$\begin{gathered}\theta^2 x(t)-x''(t)=2\theta\alpha^2 z(t) \quad (0<t<1)\\ x'(0)-\theta x(0)=0\\ x'(1)+\theta x(1)=0.\end{gathered} \tag{52}$$

The functional $S(x,y)$ thus determines the operation A^*A as a second order differential operation with associated boundary conditions. However, $S(x,y)$ is not uniquely redeterminable from (52).

5. A method of generalising the example of the previous section becomes clear if we note that the weighting function $B(s,t)$ given by (44) is the solution of

$$\theta^2 x(t)-x''(t)=2\theta\alpha^2\delta(t-s) \tag{53}$$

or, better expressed, is the Green's function of the equation system

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\theta\alpha^2}(\theta+D)(\theta-D)x(t)=z(t)\\ x(-\infty)=x(\infty)=0\end{gathered} \tag{54}$$

where D denotes the operation $\partial/\partial t$. It is also the Green's function of the system (52).

The method is then as follows: choose a p-th order differential operator with constant coefficients

$$F(D)=\prod_1^p(\theta_j+D) \tag{55}$$

where the θ_j all have positive real part. The adjoint operator will be $F(-D)$.

Choose $B(s,t)$ as the Green's function of the system

$$\begin{gathered}cF(-D)F(D)x(t)=z(t) \quad (-\infty<t<\infty)\\ x(t)=x'(t)=x''(t)=\ldots=x^{(p-1)}(t) \quad (t=\pm\infty)\end{gathered} \tag{56}$$

where the constant c is taken so as to make $B(t,t)$ equal to α^2. $B(s,t)$ is also the Green's function of the system

$$\begin{gathered}cF(-D)F(D)x(t)=z(t) \quad (0<t<1)\\ D^jF(-D)x(t)=0 \quad (t=0;\ j=0,1,\ldots,p-1)\\ D^jF(D)x(t)=0 \quad (t=1;\ j=0,1,\ldots,p-1).\end{gathered} \tag{57}$$

The functional $S(x, y)$ is

$$S(x, y) = c\int_0^1 yF(-D)F(D)x\,dt + \ldots$$

$$= c\int_0^1 [F(D)x][F(-iD)y]\,dt + \ldots$$

$$= c\int_0^1 [F(iD)x][F(-iD)y]\,dt + \ldots \tag{58}$$

where by $+\ldots$ we have indicated the presence of extra terms incorporating the boundary conditions of (58). Those extra terms are most easily calculated in any particular case by working from the fact that

$$S(e^{\xi t}, e^{\eta t}) = \frac{c[F(\xi)F(\eta)e^{\xi+\eta} - F(-\xi)F(-\eta)]}{\xi+\eta}. \tag{60}$$

Thus, if we take the simplest case, previously considered,

$$F(D) = \theta + D \tag{61}$$

$$c = \frac{1}{2\theta\alpha^2} \tag{62}$$

then expression (60) can be written

$$S(e^{\xi t}, e^{\eta t}) = \frac{1}{2\alpha^2}[e^{\xi+\eta} + 1] + \frac{1}{2\theta\alpha^2}\left[\frac{e^{\xi+\eta}-1}{\xi+\eta}\right](\xi\eta + \theta^2) \tag{63}$$

which corresponds exactly to (43).

The advantage of using higher older operators, is that if $x(t)$ is so regular that it possesses derivatives with finite mean square up to order p, then an inequality using the quadratic form (58) will exploit the fact to give a correspondingly reduced bound for P.

It will be evident that the same principles can be followed in deriving probable bounds for functions of several variables, $x(t_1, t_2, \ldots, t_m) = x(t)$. $B(s, t)$ would now be the solution of

$$cG(D)x(t) = \delta(s - t) \tag{64}$$

where $G(D)$ is a self-adjoint differential operator such as, for example,

$$G = D = \left(\theta^2 - \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial t_j^2}\right)^{\nu} \tag{65}$$

and we should have

$$S(x, y) = c\int_{\Omega} yG(D)x\,dt + \ldots \tag{66}$$

Here Ω is the region in t-space over which we wish to set bounds on $x(t)$, and by $+\ldots$ we have designated integrals over the boundary of Ω incorporating the boundary conditions which would make $B(s, t)$ as determined by (64) the Green's function of the problem

$$cG(D)x(t) = z(t), \quad (t \text{ in the interior of } \Omega). \tag{67}$$

However, I have had no success in determining what these boundary conditions should be; to deduce an expression analogous to (60) in the general multidimensional case seems very difficult.

One observation is worth making, however; that as the dimensionality m increases the order of the operator $G(D)$ must also increase if $B(t, t)$ is to remain finite. That is, the greater the number of arguments of the function $x(t)$ the greater must be the order of differentiability of $x(t)$ if one is to be able to set a bound to the probability that $x(t)$ lies between given limits. For example, if $G(D)$ is given by (65) then

$$B(s,t) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \frac{e^{\sum_1^m i\omega_j(s_j - t_j)}}{(0^2 + \sum \omega_j^2)^{\nu}} d\omega_1 \ldots d\omega_m = \frac{r^{1-\frac{m}{2}}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{J_{\frac{m}{2}-1}(r\omega)\,\omega^{\frac{m}{2}}\,d\omega}{(0^2+\omega^2)^{\nu}}$$

$$\left(r^2 = \sum (s_j - t_j)^2\right) \tag{68}$$

and the integral is convergent for $s = t$ only if $\nu > m/2$. If we consider only integral ν, we see then that $x(t)$ must possess derivatives (with respect to all variables) with finite mean squares up to order equal to the smallest integer not less than $m/2$.

6. The results of the previous section recall some results due to Weyl [3], who related the rate of convergence of the eigenvalues of an integral equation to the degree of differentiability of the kernel. Wayl's method leads to the conclusion that, if the kernel $K(s_1, s_2, \ldots, s_m; t_1, t_2, \ldots, t_m)$ possesses derivatives up to total order h in the variables s, t then asymptotically

$$\lambda_j = o\left(j^{-\frac{h}{m} - \frac{1}{2}}\right) \tag{69}$$

where λ_j is the j-th largest eigenvalue.

There is, in fact, a connection with the present subject. Returning to the discrete problem of section 1, consider the region and bounds obtained by taking B equal to the positive square root of V, a matrix whose elements we shall denote by $v_{jk}^{(1/2)}$. Applying relations (3), (4) with this choice of B we find

$$1 - \text{prob}\left[|x_j| \leqslant v_{jj}^{(1/2)};\ j = 1, 2 \ldots N\right] \geqslant \text{tr}\, V^{\frac{1}{2}} = \sum \left(\lambda_j^{(N)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{70}$$

where we have denoted the eigenvalues of V by $\lambda_j^{(N)}$. Letting the number of ordinates indefinitely we see that if the region

$$|x(t)| \leqslant \alpha(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{71}$$

can be included in a region

$$|x(t)| \leqslant a v^{\left(\frac{1}{2}\right)}(t, t) \tag{72}$$

where a is a finite constant and $v^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s, t)$ is the non-negative definite kernel satisfying

$$v(s,t) = \int_0^1 v^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s,u)\, v^{\left(\frac{1}{2}\right)}(u,t)\,du \tag{73}$$

then we can certainly not set a finite Tchebichev-type bound to the probability that $x(t)$ somewhere falls outside the region (71) unless the series $\Sigma \lambda_j^{1/2}$ converges. The λ_j now denote the eigenvalues of the kernel constituted by the covariance $v(s,t)$. (Note that the condition is necessary, not sufficient). That is, we must have for large j

$$\lambda_j = o(j^{-2}). \tag{74}$$

The conclusion also applies if x is a function of m variables $t_1, t_2 \ldots t_m$ all assuming values in a finite region. Applying Weyl's theorem, we see on comparing (69) and (74) that the series $\Sigma \lambda_j^{1/2}$ will be convergent if $v(s,t)$ possesses derivatives up to order h where $h > \frac{3m}{2}$.

Actually, it can be shown (a proof will be published elsewhere) that if all the λ_j have the same sign and h is even then (69) can be improved to

$$\lambda_j = o\left(j^{-\frac{h}{m}-1}\right). \tag{75}$$

This means that in the present case we need only require that the order of differentiability h of $v(s,t)$ be the first even number exceeding m; that is, the variable $x(t)$ must possess derivatives up to order $p = h/2$, where p is the smallest integer exceeding $m/2$. This agrees with the conclusion of the previous section.

Acknowledgements: I am grateful to Mr. D. Vere-Jones for helpful comment. The major part of the paper was written during my tenure of a Senior Research Fellowship at the Australian National University; I am indebted to members of the Department of Statistics of this University for many stimulating conversations.

Applied Mathematics Laboratory,
N. Z. Department of Scientific
Industrial Research

Поступила в редакцию
7.5.58

REFERENCES

[1] D. N. Lal, A note on a form of Tschebycheff's inequality for two or more variables, Sankhya, **15** (1955), 317—20.
[2] M. Loéve, Probability Theory, New York, 1955.
[3] H. Weyl, Das asymptotishe Verteilungsgesetz der Eigenwarte linearer partieller Differentialgleichungen, Math. Ann., **71** (1911), 441—79.
[4] P. Whittle, A multivariate generalisation of Tchebichev's inequality, Quart. J. Math., Oxford (to appear).

НЕПРЕРЫВНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ НЕРАВЕНСТВА ЧЕБЫШЕВА

П. УИТЛ (ВЕЛЛИНГТОН, НОВАЯ ЗЕЛАНДИЯ)

(*Резюме*)

Пусть $x(t)$ — случайная функция с известными $\mathbf{E}[x(t)]$ и $\mathbf{E}[x(t)x(s)]$ $(0 \leqslant s, t \leqslant 1)$. В § 3 дана оценка сверху для вероятности того, что $|x(t)|$ хотя бы при одном t превзойдет заданную функцию $\alpha(t)$. В оценку входит произвольная квадратичная форма, выбирая которую надлежащим образом, получаем те или иные конкретные оценки (см. например, формулу (30)). Эффективность этого способа зависит от степени дифференцируемости $x(t)$. В двух заключительных параграфах рассматривается случай, когда x есть случайная функция нескольких переменных $t_1, t_2, \ldots, t_m$.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том III И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 4*
1958

ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ ПО КАНАЛУ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Р. Л. ДОБРУШИН

1. Введение. В теории информации рассматривают обычно следующую ситуацию, изображенную на рис. 1 (см. например [5] и [3]). Предполагаются заданными статистические свойства канала связи и изучается возможность превратить заданное сообщение на входе в заданное сообщени на выходе, используя оптимальные методы кодирования и декодирования.

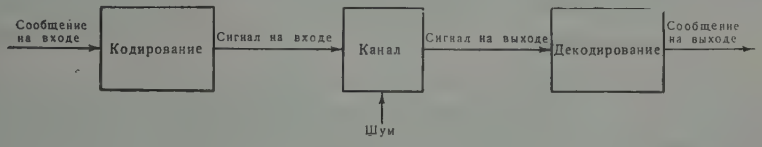


Рис. 1

Во многих реальных системах связи имеется также возможность передачи сигналов в обратном направлении с выхода на вход. В таких случаях говорят о системах с обратной связью (см. рис. 2). Обратная связь часто используется для улучшения качества передачи в прямом направлении. Так, например, если два собеседника A и $Б$ говорят по телефону, то и в том случае, когда единственная цель их разговора — передать информацию, имеющуюся у A и предназначенную для $Б$, причем $Б$ не имеет информаци для A и A не рассчитывает получить такую информацию, все же используется обычно канал обратной связи. Так, $Б$ переспрашивает и просит A повторить плохо расслышанные им слова. Если информация легко искажаемая или особо важная, то $Б$ повторяет все им услышанное, с тем, чтобы A подтвердил, что $Б$ воспринял сообщение правильно. В последние годы разрабатываются системы телеграфной передачи дискретной информации, основанные на том же принципе. Расчету конкретных систем такого рода посвящены работы ([1], [2], [6], [8]). В этих работах ставится также естественно возникающая проблема сравнения пропускных способностей систем с обратной связью и без нее при одинаковом уровне шумов, однако это проблема не находит там полного решения.

В основной части предлагаемой работы (так же, как и в предыдущих работах [1], [2], [6], [8]) рассматривается канал связи с дискретным временем, в котором символы, поданные в разные моменты времени, искажаются независимо друг от друга. Мы будем называть такой канал каналом

без памяти. Мы доказываем, что если информация, содержащаяся в сообщении, превосходит пропускную способность канала прямой связи, то это сообщение не может быть передано по каналу с обратной связью, какова бы ни была пропускная способность канала обратной связи. Таким образом, применение обратной связи не увеличивает пропускную способность канала без памяти. Нельзя, конечно, забывать, что, как и все выводы теории

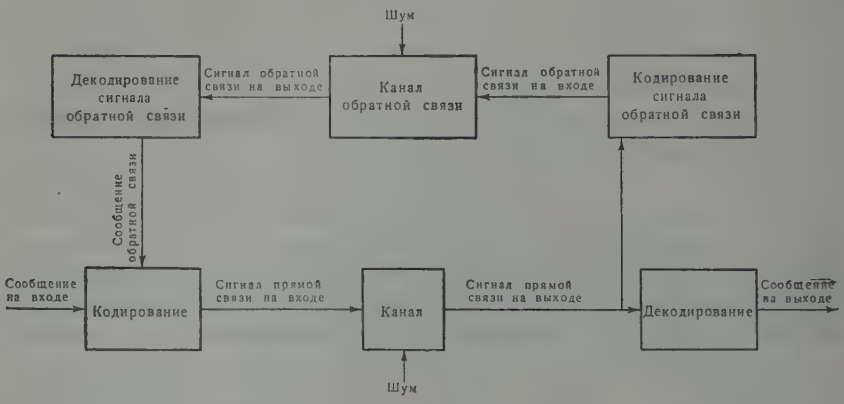


Рис. 2

информации, этот вывод имеет асимптотический характер и относится к оптимальным методам кодирования и декодирования. Использование обратной связи не дает возможности передать сообщение, которое нельзя было бы передать без ее использования, однако оно может упростить применяемые при передаче методы кодирования сигнала.

Мы показываем, что положение существенно меняется, если рассматривать канал связи с памятью. В этом случае канал обратной связи может доставить сведения о прохождении сигнала, а значит и о характере шумов, в прошлом; эти сведения, уточняя наши сведения о характере шумов в настоящем и будущем, могут помочь выбрать оптимальный метод кодирования сообщения. При этом, однако, существенно, чтобы канал связи был достаточно быстродействующим, так как эргодический характер реальных шумов приводит к тому, что запоздалые сведения о характере шумов в далеком прошлом не увеличивают наших знаний о них в данный момент, и ситуация может оказаться такой же, как и для канала без памяти.

Вопрос о полной количественной оценке возникающих здесь возможностей остается открытым. Он решается лишь для одного частного класса каналов с памятью в предположении, что пропускная способность канала обратной связи столь велика, что обратная связь мгновенно доставляет на вход канала полные и безошибочные сведения о сигнале на входе, и что канал является длительно действующим, а именно для каналов, с которыми связан и некоторый случайный параметр α, так что при любом фиксированном значении параметра $\alpha = a_e$ этот канал превращается в канал без памяти. Для такого канала находится также формула для его асимптотической пропускной способности без использования обратной связи. Эта фор-

мула, по-видимому, нова и может иметь также самостоятельный интерес. Для некоторых примеров проведены расчеты выигрыша в пропускной способности, обуславливаемого использованием обратной связи.

Резюмируя развитые выше соображения, мы можем сказать, что применение обратной связи для „переспрашивания" не увеличивает пропускную способность канала, но может упростить метод передачи. Пропускную способность канала можно увеличить, используя обратную связь для „разведки состояния канала прямой связи".

2. Математическая постановка задачи. Ради простоты обозначений мы будем считать, что все рассматриваемые случайные величины принимают каждая конечное число значений. Однако все дальнейшие построения переносятся, без всяких изменений, на случай каналов с произвольным пространством значений.

Пусть $(E_1, \ldots, E_m)$ — алфавит символов на входе канала и $(\overline{E}_1, \ldots, \overline{E}_{\overline{m}})$— алфавит символов на выходе канала. Фиксируем целое число n — *длину передачи*. Обозначим $\mathfrak{E}^{(n)}$ пространство всевозможных сигналов на входе, состоящее из m^n последовательностей вида $(E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_n})$, и $\overline{\mathfrak{E}}^{(n)}$—пространство всевозможных сигналов на выходе, состоящее из $\overline{m}^{(n)}$ последовательностей вида $(\overline{E}_{j_1}, \overline{E}_{j_2}, \ldots, \overline{E}_{j_n})$. Канал связи определяется заданием системы условных вероятностей

$$i_k = 1, \ldots, m,$$
$$p(j_1, \ldots, j_n \mid i_1, \ldots, i_n), \quad j_k = 1, \ldots, \overline{m}$$

того, что сигнал $(E_{i_1}, \ldots, E_{i_n})$ на входе превратится в сигнал $(\overline{E}_{j_1}, \ldots, \overline{E}_{j_n})$, на выходе. Очевидно, что при любых $i_1, \ldots, i_n$

$$\sum_{j_1, \ldots, j_n} p(j_1, \ldots, j_n \mid i_1, \ldots, i_n) = 1. \tag{1}$$

Мы будем называть, следуя Хинчину [7], канал связи *каналом без предвосхищения*, если при любых фиксированных целых k, $0 \leqslant k \leqslant n$ и индексах $j_1, \ldots, j_k$, $i_1, \ldots, i_k$

$$\sum_{j_{k+1}, \ldots, j_n} p(j_1, \ldots, j_n \mid i_1, \ldots, i_n) = q(j_1, \ldots, j_k \mid i_1, \ldots, i_k), \tag{2}$$

т. е. не зависит от выбора индексов $i_{k+1}, \ldots, i_n$. Смысл условия (2) состоит в том, что условная вероятность того, что первые k символов на выходе примут фиксированные значения $\overline{E}_{j_1}, \ldots, \overline{E}_{j_k}$, при условии, что задан сигнал на выходе $E_{i_1}, \ldots, E_{i_n}$ зависит лишь от k первых символов этого сигнала. В тех случаях, когда параметр имеет смысл физического времени, предположение о том, что канал связи является каналом без предвосхищения является естественным, так как оно означает, что сигнал на выходе в данный момент времени не зависит от того, какие значения примут символы сигнала на входе в будущие моменты времени. В дальнейшем будут рассматриваться лишь каналы без предвосхищения.

Мы будем говорить, что рассматриваемый канал является *каналом без памяти*, если можно задать набор вероятностей $p_{ij}^{(k)}$; $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, \bar{m}$ так, чтобы при всех $i_1, \ldots, i_n$ и $j_1, \ldots, j_n$

$$p(j_1, \ldots, j_n \mid i_1, \ldots, i_n) = p_{i_1 j_1}^{(1)} p_{i_2 j_2}^{(2)} p_{i_3 j_3}^{(3)} \ldots p_{i_n j_n}^{(n)}. \qquad (3)$$

Очевидно, что канал без памяти является каналом без предвосхищения. Мы будем называть канал без памяти однородным по времени, если $p_{ij}^{(k)}$ не зависит от k.

Пусть далее $\mathscr{F} = (F_1, \ldots, F_e)$ и $\bar{\mathscr{F}} = (\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_{\bar{e}})$, соответственно, пространство значений сообщений на входе и на выходе. Обычно, в приложениях, пространства $\mathscr{F}$ и $\bar{\mathscr{F}}$ имеют такую же сложную структуру, как и пространства $\mathscr{E}^{(n)}$, $\bar{\mathscr{E}}^{(n)}$, однако это обстоятельство для нас несущественно.

Зададим случайную величину η, принимающую значения в пространстве $\mathscr{F}$ сообщений на входе. Величину η мы будем называть *сообщением на входе*. Рассмотрим также случайные величины ξ, $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$, принимающие значения соответственно в пространствах $\mathscr{E}^{(n)}$, $\bar{\mathscr{E}}^{(n)}$ и $\bar{\mathscr{F}}$. Эти величины мы будем называть сигналом на входе, сигналом на выходе и сообщением на выходе. Положим (см. (2))

$$r_k(j_k \mid i_1, \ldots, i_k;\ j_1, \ldots, j_{k-1}) = \frac{q(j_1, \ldots, j_k \mid i_1, \ldots, i_k)}{\sum_{j_k=1}^{\bar{m}} q(j_1, \ldots, j_k \mid i_1, \ldots, i_k)}. \qquad (4)$$

Величина $r_k(j_k \mid i_1, \ldots, i_k;\ j_1, \ldots, j_{k-1})$ задает условную вероятность того, что k-ый символ на выходе примет значение E_{j_k} при заданных k символах $E_{i_1}, \ldots, E_{i_k}$ сигнала на входе и заданных $k-1$ символах $\bar{E}_{j_1}, \ldots, \bar{E}_{j_{k-1}}$ сигнала на выходе. В случае канала без памяти

$$r_k(j_k \mid i_1, \ldots, i_k;\ j_1, \ldots, j_{k-1}) = p_{i_k j_k}^{(k)}. \qquad (5)$$

Мы будем говорить, что *сообщение на выходе η переходит в сообщение на выходе $\bar{\eta}$, в результате передачи по каналу длины n*, если можно подобрать сигнал на входе $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и сигнал на выходе $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_n)$ так, чтобы выполнялись следующие два условия. Во-первых, условная вероятность

$$\mathbf{P}\{\xi_k = \bar{E}_{j_k} \mid \xi_1 = E_{i_1}, \ldots, \xi_k = E_{i_k}, \bar{\xi}_1 = \bar{E}_{j_1}, \ldots, \bar{\xi}_{k-1} = \bar{E}_{j_{k-1}},\ \eta = F_j\} =$$

$$= r(j_k \mid i_1, \ldots, i_k;\ j_1, \ldots, j_{k-1}) \qquad (6)$$

при любых $j = 1, \ldots, e$; $i_r = 1, \ldots, m$; $j_r = 1, \ldots, \bar{m}$. Наглядный смысл этого условия состоит в том, что условная вероятность того, что k-ый символ на выходе примет значение $\bar{E}_{j_k}$ при известных k символах на входе и $k-1$ предыдущих символах на выходе будет такой, какой ей предопределено быть свойствами заданного канала, независимо от того, какое именно сообщение F_j закодировано этим сигналом. Во-вторых, условная вероятность

$$\mathbf{P}\{\overline{\eta} = \overline{F}_\alpha \mid \overline{\xi} = (\overline{E}_{j_1}, \ldots, \overline{E}_{j_n}),\ \xi = (E_{i_1}, \ldots, E_{i_n}),\ \eta = F_j\} =$$

$$= \mathbf{P}\{\overline{\eta} = \overline{F}_\alpha \mid \overline{\xi} = (\overline{E}_{j_1}, \ldots, \overline{E}_{j_n})\} \tag{7}$$

при любых $\alpha = 1, \ldots, \overline{e}$; $j = 1, \ldots, e$; $i_r = 1, \ldots, m$; $j_r = 1, \ldots, \overline{m}$. Наглядный смысл этого второго условия состоит в том, что значение сообщения на входе F_α, которое получается в результате декодирования из сигнала на выходе $(\overline{E}_{j_1}, \ldots, \overline{E}_{j_n})$ не зависит от того, каким было сообщение на входе и сигнал на входе. Это условие естественно, так как при проведении декодирований не могут быть использованы никакие дополнительные сведения о сообщении и сигнале на входе канала, кроме сведений, заложенных в сигнале на выходе.

Мы будем говорить, что *сообщение на входе η переходит в сообщение на выходе $\overline{\eta}$ в результате передачи по каналу длины n без использования обратной связи*, если сигналы на входе ξ и на выходе $\overline{\xi}$ могут быть подобраны так, чтобы кроме условий (6) и (7) выполнялось еще следующее дополнительное условие. При любых $k = 1, \ldots, n$, $i_r = 1, \ldots, m$; $j_r = 1, \ldots, \overline{m}$, $j = 1, \ldots, e$.

$$\mathbf{P}\{\xi_k = E_{i_k} \mid \xi_1 = E_{i_1}, \ldots, \xi_{k-1} = E_{i_{k-1}}, \overline{\xi}_1 = \overline{E}_{j_1}, \ldots, \overline{\xi}_{k-1} = \overline{E}_{j_{k-1}},\ \eta = F_j\} =$$

$$= \mathbf{P}\{\xi_k = E_{i_k} \mid \xi_1 = E_{i_1}, \ldots, \xi_{k-1} = E_{i_{k-1}},\ \eta = F_j\}. \tag{8}$$

Если условие (8) не выполняется, то мы будем говорить, что сообщение η *переходит в сообщение* $\widetilde{\eta}$ *в результате передачи длины n с использованием обратной связи*. Наглядный смысл предположения (8) состоит в том, что в случае передачи без обратной связи, когда в процессе кодирования нам понадобится задать k-й символ сигнала на входе, мы можем использовать лишь сообщение F_j и $k-1$ предыдущих символов на входе, в то время как символы сигнала на выходе $\overline{E}_{j_1}, \ldots, \overline{E}_{j_{k-1}}$ нам недоступны. С другой стороны, преимущества, даваемые использованием обратной связи, состоят в том и только в том, что обратная связь доставляет на вход некоторые сведения о символах сигнала на выходе $\overline{E}_{j_1}, \ldots, \overline{E}_{j_{k-1}}$ в предыдущие моменты времени, и эти сведения можно использовать при кодировании k-го символа. Именно к этой схеме сводятся примеры использования обратной связи, приведенные в разделе 1.

3. Формулировка основной теоремы. Напомним теперь, что если две случайные величины ζ и $\overline{\zeta}$ принимают значения $(G_1, \ldots, G_k)$ и $(\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_k)$ соответственно, то *информацией пары* ζ и $\overline{\zeta}$ называется число

$$I(\zeta, \overline{\zeta}) = \sum \mathbf{P}\{\zeta = G_i, \overline{\zeta} = \overline{G}_j\} \log \frac{\mathbf{P}\{\zeta = G_i, \overline{\zeta} = G_j\}}{\mathbf{P}\{\zeta = G_i\}\,\mathbf{P}\{\overline{\zeta} = G_j\}}. \tag{9}$$

Будем говорить, что *две случайные величины* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $\overline{\xi} = (\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_n)$ *связаны каналом длины n*, если эти величины принимают значения, соответственно, в пространствах $\mathcal{E}^{(n)}$ и $\overline{\mathcal{E}}^{(n)}$ и при любых $i_1, \ldots, i_n$, $j_1, \ldots, j_n$.

$$\mathbf{P}\{\overline{\xi} = (\overline{E}_{j_1}, \ldots, \overline{E}_{j_n}) \mid \xi = (E_{i_1}, \ldots, \overline{E}_{i_n})\} = p(j_1, \ldots, j_n \mid i_1, \ldots, i_n). \tag{10}$$

Будем, как обычно, называть *пропускной способностью канала длины n без обратной связи* число

$$C^{(n)} = \sup I(\xi, \bar{\xi}),$$

где верхняя грань берется по всем парам случайных величин $\xi, \bar{\xi}$, связанных каналом длины n. Если рассматриваемый канал является каналом без памяти, то

$$C^{(n)} = D_1 + \ldots + D_n, \tag{11}$$

где

$$D_k \sup_{\{p_i\}} \sum_{i,j} p_i p_{ij}^{(k)} \log \frac{p_{ij}^{(k)}}{\bar{p}_j}, \quad \bar{p}_j = \sum_{i=1}^{m} p_i p_{ij}^{(k)}, \tag{12}$$

и верхняя грань берется по всевозможным распределениям вероятностей $(p_1, \ldots, p_m)$. Естественное с наглядной точки зрения равенство (11) будет доказано в разделе 6.

Сформулируем теперь первое утверждение известной теоремы Шеннона о канале без обратной связи.

Теорема 1. *Если сообщение на входе η переходит в сообщение на выходе $\bar{\eta}$ в результате передачи по каналу длины n без использования обратной связи, то*

$$I(\eta, \bar{\eta}) \leqslant C^{(n)}, \tag{13}$$

где $C^{(n)}$ — пропускная способность канала длины n без обратной связи.

Известное доказательство этого утверждения будет приведено в разделе 5, так как оно до сих пор не было изложено полностью в нужной нам форме. Второе утверждение теоремы Шеннона гласит, что в некотором асимптотическом смысле при $n \to \infty$ и при некоторых дополнительных условиях регулярности, наложенных на эргодический канал, условие (13) является также достаточным для того, чтобы сообщение η переходило в сообщение $\bar{\eta}$ в результате передачи по каналу длины n. Мы не будем приводить ни доказательства, ни даже точной формулировки этого утверждения, так как оно не используется в дальнейшем и нужно нам лишь для общей ориентировки. Подробнее см. ([3], [5], [7], [8]).

Основным результатом предлагаемой работы является следующая теорема о канале без памяти с обратной связью.

Теорема 2. *Если сообщение на входе η переходит в сообщение на выходе $\bar{\eta}$ в результате передачи по каналу без памяти длины n с использованием обратной связи, то*

$$I(\eta, \bar{\eta}) \leqslant C^{(n)}, \tag{14}$$

где $C^{(n)}$ — пропускная способность канала длины n без обратной связи.

Таким образом, если некоторая информация может быть передана по каналу без памяти с использованием обратной связи, то эта информация не превышает пропускной способности канала без обратной связи. Так как в соответствии со вторым утверждением теоремы Шеннона верно, что в некотором асимптотическом смысле информация, меньшая пропускной способности канала, может быть передана по этому каналу без использования

обратной связи, то, в аналогичном асимптотическом смысле, можно сказать, что любая информация, которая может быть передана по каналу без памяти с использованием обратной связи, может быть передана по тому же каналу и без использования обратной связи.

В последнем параграфе 8 мы рассматриваем один частный класс каналов с памятью. Каналы этого класса мы будем называть рандомизированными каналами без памяти. А именно, мы предположим, что нам задан набор переходных вероятностей $p_{ij}(\alpha)$, задающих при любом фиксированном $\alpha = a$ однородный по времени канал без памяти, и что параметр α является случайной величиной. Наглядно, можно представлять себе, что рандомизированный канал без памяти представляет собой обычный канал без памяти, но с apriori неизвестным статистическим режимом работы и заданным априорным распределением вероятностей для этого режима. Для простоты мы предположим, что случайный параметр α принимает лишь конечное число значений $a_1, \ldots, a_s$ с вероятностями $q(a_1), \ldots, q(a_s)$ соответственно. Тогда формальным математическим определением рандомизированного канала без памяти может служить формула

$$p(j_1, \ldots, j_n \mid i_1, \ldots, i_n) = \sum_{k=1}^{s} q(a_k)\, p_{i_1 j_1}(a_k)\, p_{i_2 j_2}(a_k) \ldots p_{i_n j_n}(a_k) \tag{15}$$

для условных вероятностей, задающих канал. Очевидно, что мы получаем канал без предвосхищения.

Мы установим в разделе 7 следующее асимптотическое выражение для пропускной способности рандомизированного канала без памяти и без обратной связи

$$C^{(n)} = n\bar{C} + O(1) \tag{16}$$

при $n \to \infty$, где

$$\bar{C} = \sup \sum_k q(a_k) \sum_{i,j} p_i p_{ij}(a_k) \log \frac{p_{ij}(a_k)}{\bar{p}_j(a_k)} \tag{16'}$$

$$\bar{p}_j(a_k) = \sum_i p_i p_{ij}(a_k),$$

и верхняя грань берется по всевозможным распределениям вероятностей $p_1, \ldots, p_m$. Подчеркнем, что p_i в отличие $p_j(\alpha)$ не зависит от случайного параметра α.

Мы докажем далее следующую теорему о рандомизированном канале без памяти с обратной связью.

Теорема 3. *Если сообщение на входе η переходит в сообщение на выходе $\bar{\eta}$ в результате передачи по каналу без памяти длины n с использованием обратной связи, то информация*

$$I(\eta, \bar{\eta}) \leqslant \bar{K} n, \tag{17}$$

где

$$\bar{K} = \sum_k q(a_k)\, D(a_k) \tag{18}$$

и

$$D(a_k) = \sup_{\{p_i\}} \sum_{i,j} p_i p_{ij}(a_k) \log \frac{p_{ij}(a_k)}{\bar{p}_j}, \quad \bar{p}_j = \sum_i p_i p_{ij}(a_k) \tag{18'}$$

равняется пропускной способности на единицу времени без обратной связи канала без памяти, заданного переходными вероятностями $p_{ij}(a_k)$ (ср. (11) и (12)).

Для канала без памяти величина α принимает единственное значение $C^{(n)} = \overline{K}n$. Поэтому теорема 3 является обобщением теоремы 2. Очевидно, что всегда $\overline{C} \leqslant \overline{K}$, причем некоторые из приводимых в разделе 8 примеров показывают, что разность $\overline{K} - \overline{C}$, характеризующая выигрыш в пропускной способности от использования обратной связи, вообще говоря, положительна, но обычно невелика. Наглядно различие между $\overline{C}$ и $\overline{K}$ можно разъяснить, сказав, что в случае отсутствия обратной связи оптимальные вероятности p_i сигналов на входе канала приходится подбирать общими для всех режимов работы канала, в то время, как обратная связь доставляет на вход сведения о том, в каком именно режиме работает канал, и поэтому вероятности p_i сигналов на входе канала можно подбирать так, чтобы они были оптимальными именно для этого режима.

Теорема 3 ничего не говорит о возможности передать сообщение с информацией $I(\eta, \overline{\eta}) < \overline{K}n$ и поэтому естественно встает вопрос о том, является ли оценка (17) оптимальной. Рандомизированный канал связи без памяти будет эргодическим лишь в том случае, когда он является обычным каналом связи. Поэтому для него нельзя получить никаких результатов типа обратной теоремы Шеннона. Однако, несколько видоизменив рассмотренный выше канал, можно сделать его эргодическим. Для этого надо предположить, что в каждый момент времени происходит с вероятностью u, независимо от предыдущего функционирования канала, случайное изменение режима его работы. Если u близко к 0, то наш новый канал будет „почти совпадать“ с рассмотренным выше рандомизированным каналом без памяти, а найденные нами характеристики для рандомизированного канала без памяти будут пределами соответствующих характеристик для нового канала. Этот новый канал будет уже эргодическим. Можно было бы доказать, что если

$$\frac{I(\eta, \overline{\eta})}{\overline{K}n} < 1,$$

то при достаточно малом u и достаточно большой длине канала n сообщение η может быть превращено в сообщение $\overline{\eta}$ в результате передачи с использованием обратной связи. Мы не будем приводить здесь ни полного доказательства, ни точной формулировки этого факта, но зато укажем наглядную идею такого доказательства. Если u мало, то канал работает в постоянном режиме большой (порядка $1/u$) промежуток времени. Посылая для разведки разнообразные сигналы и используя обратную связь, можно установить за небольшую часть этого промежутка времени, в каком именно режиме работает канал. После этого можно использовать метод кодирования, оптимальный для этого найденного режима $\alpha = a_k$ и передавать сообщение со скоростью $D(a_k)$ битов в секунду. Так как примерно q_{a_k}-ую долю всего времени канал работает в режиме a_k, то средняя скорость передачи сообщения будет близка к

$$\sum_k q_{a_k} D(a_k) = \overline{K},$$

что и нужно доказать.

4. Некоторые свойства информации. Напомним некоторые известные свойства информации $I(\zeta, \overline{\zeta})$, определяемой равенством (9).

Рассмотрим третью случайную величину β, принимающую значения $B_1, \ldots, B_r$. Условной информацией величин ζ и $\overline{\zeta}$ при условии $\beta = B_u$ мы будем называть число

$$I(\zeta, \overline{\zeta} \mid \beta = B_u) = \sum_{i,j} \mathbf{P}\{\zeta = G_i, \overline{\zeta} = \overline{G}_j \mid \beta =$$

$$= B_u\} \log \frac{\mathbf{P}\{\zeta = G_i, \overline{\zeta} = \overline{G}_j \mid \beta = B_u\}}{\mathbf{P}\{\zeta = G_i \mid \beta = B_u\}\, \mathbf{P}\{\overline{\zeta} = \overline{G}_j \mid \beta = B_u\}}.$$

Средним значением условной информации пары $\zeta, \overline{\zeta}$ при заданной β мы будем называть число

$$\mathbf{M} I(\zeta, \overline{\zeta} \mid \beta) = \sum_{u=1}^{r} I(\zeta, \overline{\zeta} \mid \beta = B_u) \mathbf{P}\{\beta = B_u\}. \tag{19}$$

Пару случайных величин ζ, β можно рассматривать как единую случайную величину (ζ, β), значениями которой являются kr пар (G_i, B_u). В этих обозначениях имеет место следующая важная формула условной информации, явно сформулированная впервые, по-видимому, в работе Колмогорова [3],

$$I((\zeta, \beta), \overline{\zeta}) = I(\beta, \overline{\zeta}) + \mathbf{M} I(\zeta, \overline{\zeta} \mid \beta). \tag{20}$$

Формула (20) является в интересующем нас случае дискретных величин следствием следующего простого вычисления

$$I((\zeta, \beta), \overline{\zeta}) = \sum_{i,j,u} \mathbf{P}\{\zeta = G_i, \overline{\zeta} = \overline{G}_j, \beta = B_u\} \times$$

$$\times \log \frac{\mathbf{P}\{\zeta = G_i; \overline{\zeta} = \overline{G}_j, \beta = B_u\}}{\mathbf{P}\{\zeta = G_i, \beta = B_u\}\, \mathbf{P}\{\overline{\zeta} = \overline{G}_j\}} = \sum_{i,j,u} \mathbf{P}\{\zeta = G_i, \overline{\zeta} = \overline{G}_j, \beta = B_u\} \times$$

$$\times \log \frac{\mathbf{P}\{\zeta = G_i, \overline{\zeta} = \overline{G}_j \mid \beta = B_u\}\, \mathbf{P}\{\beta = B_u\}\, \mathbf{P}\{\overline{\zeta} = \overline{G}_j, \beta = B_u\}}{\mathbf{P}\{\zeta = G_i \mid \beta = B_u\}\, \mathbf{P}\{\beta = B_u\}\, \mathbf{P}\{\overline{\zeta} = \overline{G}_j\}\, \mathbf{P}\{\overline{\zeta} = \overline{G}_j, \beta = B_u\}} =$$

$$= \sum_{i,j,u} \mathbf{P}\{\zeta = G_i, \overline{\zeta} = \overline{G}_j, \beta = B_u\} \log \frac{\mathbf{P}\{\zeta = G_i, \overline{\zeta} = \overline{G}_j \mid \beta = B_u\}}{\mathbf{P}\{\zeta = G_i \mid \beta = B_u\}\, \mathbf{P}\{\overline{\zeta} = \overline{G}_j \mid \beta = B_u\}} +$$

$$+ \sum_{i,j,u} \mathbf{P}\{\zeta = G_i, \overline{\zeta} = \overline{G}_j, \beta = B_u\} \log \frac{\mathbf{P}\{\overline{\zeta} = \overline{G}_j, \beta = B_u\}}{\mathbf{P}\{\overline{\zeta} = \overline{G}_j\}\, \mathbf{P}\{\beta = B_u\}} =$$

$$= I(\beta, \overline{\zeta}) + \mathbf{M} I(\zeta, \overline{\zeta} \mid \beta).$$

Отметим теперь некоторые важные следствия из формулы условной информации (20). Заметим, во-первых, что так как условная информация $I(\zeta, \overline{\zeta} \mid \beta) \geqslant 0$, то для любых трех случайных величин ζ, β, $\overline{\zeta}$

$$I((\zeta, \beta), \overline{\zeta}) \geqslant I(\beta, \overline{\zeta}). \tag{21}$$

Заметим теперь, что для любых двух случайных величин γ и δ

$$I(\gamma, \delta) \leqslant I(\gamma, \gamma). \tag{22}$$

Чтобы вывести неравенство (22), достаточно заметить, используя формулу условной информации и неравенство (21), что

$$I(\gamma, \delta) \leqslant I(\gamma, (\gamma, \delta)) = I((\gamma, \delta), \gamma) = I(\gamma, \gamma) + \mathbf{M}\, I(\gamma, \delta \mid \gamma),$$

и что, так как информация любой случайной величины относительно константы равна нулю, то $\mathbf{M}\, I(\delta, \gamma \mid \gamma) = 0$. Нам окажется также полезным тот широко известный факт (см. [5], [7]), что если величина γ принимает конечное число s значений, то ее энтропия

$$I(\gamma, \gamma) \leqslant \log s. \tag{23}$$

Напомним теперь, что о трех случайных величинах ζ, β, $\bar{\zeta}$ говорят, что они образуют цепь Маркова, если

$$\mathbf{P}\{\bar{\zeta} = \bar{G}_j \mid \beta = B_u, \zeta = G_i\} = \mathbf{P}\{\bar{\zeta} = \bar{G}_j \mid \beta = B_u\} \tag{24}$$

при любых i, j, u. Условие (24) эквивалентно следующему условию: при всех i, j, u

$$\mathbf{P}\{\bar{\zeta} = \bar{G}_j, \zeta = G_i \mid \beta = B_u\} = \mathbf{P}\{\bar{\zeta} = \bar{G}_j \mid \beta = B_u\}\, \mathbf{P}\{\zeta = G_i \mid \beta = B_u\}. \tag{25}$$

Известный факт об эквивалентности условий (25) и (24) нетрудно проверить непосредственным вычислением. Из (25) следует очевидным образом, что если величины $\bar{\zeta}$, β, ζ образуют цепь Маркова, то условная информация $I(\zeta, \bar{\zeta}, \mid \beta = B_u) = 0$ и, следовательно, формула условной информации (21) показывает, что

$$I(\bar{\zeta}, (\zeta, \beta)) = I(\bar{\zeta}, \beta). \tag{26}$$

Этот важный факт будет неоднократно использован в дальнейшем.

Нам понадобится, наконец, следующая формула тройной информации. Для любых трех случайных величин β, γ, δ

$$I((\beta, \gamma), \delta) + I(\beta, \gamma) = I(\beta, (\gamma, \delta)) + I(\gamma, \delta). \tag{27}$$

Для вывода этой формулы достаточно заметить путем непосредственного подсчета, что как левая, так и правая части этой формулы равны

$$\sum_{i,j,k} \mathbf{P}\{\beta = B_i, \gamma = C_j, \delta = D_k\} \log \frac{\mathbf{P}\{\beta = B_i, \gamma = C_j, \delta = D_k\}}{\mathbf{P}\{\beta = B_i\}\, \mathbf{P}\{\gamma = C_j\}\, \mathbf{P}\{\delta = D_k\}}.$$

5. **Доказательство теоремы Шеннона о канале без обратной связи.** Предположим, что сообщение на входе η переходит в сообщение на выходе $\tilde{\eta}$ в результате передачи по каналу длины n и рассмотрим соответствующие сигнал на входе $\bar{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и сигнал на выходе $\bar{\tilde{\xi}} = (\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_n)$. Из равенства (7) выводим, применяя формулу полной вероятности к системе событий $\xi = (E_{i_1}, \ldots, E_{i_n})$, что

$$\mathbf{P}\{\overline{\eta} = \overline{F}_\alpha \mid \overline{\xi} = (\overline{E}_{j_1}, \ldots, \overline{E}_{j_n}),\ \eta = F_j\} = \mathbf{P}\{\overline{\eta} = \overline{F}_\alpha \mid \overline{\xi} = (E_{j_1}, \ldots, \overline{F}_{j_n})\}.$$

Сравнивая это равенство и определение цепи Маркова (24), видим, что величины $\eta, \overline{\xi}, \overline{\eta}$ образуют цепь Маркова. Поэтому из формул (21) и (26) вытекает, что информация

$$I(\eta, \overline{\eta}) \leqslant I((\overline{\eta}, \overline{\xi}), \eta) = I(\overline{\xi}, \eta). \tag{28}$$

Подчеркнем, что мы вывели неравенство (28), исходя из условия (7), верного как в случае использования, так и в случае неиспользования обратной связи, и поэтому (28) верно также и для каналов с обратной связью.

Рассмотрим теперь передачу без использования обратной связи. Тогда верно равенство (8). Мы хотим доказать, исходя из общего условия (6) и равенства (8), что при всех $j_1, \ldots j_k, i_1, \ldots, i_k$ и для любого $1 \leqslant k \leqslant n$

$$\mathbf{P}\{(\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_k) = (\overline{E}_{j_1}, \ldots, \overline{E}_{j_k}) \mid (\xi_1, \ldots, \xi_k) = (E_{i_1}, \ldots, E_{i_k}),\ \eta = F_j\} =$$

$$= \prod_{\alpha=1}^{k} r(j_\alpha \mid i_k, \ldots, i_\alpha;\ j_1, \ldots, j_{\alpha-1}). \tag{29}$$

Равенство (29) мы будем доказывать индукцией по k. При $k = 1$ оно переходит непосредственно в равенство (6) для $k = 1$. Пусть оно выполнено для $k - 1$ сомножителей. Заметим, теперь, что из равенства (8) следует, что при условии, что $\{(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}) = (E_{i_1}, \ldots, E_{i_{k-1}})\}$ и $\{\eta = F_j\}$ события $\{\xi_k = E_{i_k}\}$ и $\{(\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_{k-1}) = (\overline{E}_{j_1}, \ldots, \overline{E}_{j_{k-1}})\}$ являются независимыми. Отсюда следует, что

$$\mathbf{P}\{(\overline{\xi}, \ldots, \overline{\xi}_{k-1}) = (\overline{E}_{j_1}, \ldots, E_{j_{k-1}}) \mid (\xi_1, \ldots, \xi_k) = (E_{i_1}, \ldots, E_{i_k}),\ \eta = F_j\} =$$

$$= \mathbf{P}\{(\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_{k-1}) = (\overline{E}_{j_1}, \ldots, \overline{E}_{j_{k-1}}) \mid (\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}) = (E_{i_1}, \ldots, E_{i_{k-1}}),\ \eta = F_j\}. \tag{30}$$

Применяя теперь формулу условной вероятности, формулу (6), формулу (30) и предположение индукции, находим, что

$$\mathbf{P}\{(\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_k) = (\overline{E}_{j_1}, \ldots, \overline{E}_{j_k}) \mid (\xi_1, \ldots, \xi_k) = (E_{i_1}, \ldots, E_{i_k}),\ \eta = F_j\} =$$

$$= \mathbf{P}\{\overline{\xi}_k = \overline{E}_{j_k} \mid (\xi_1, \ldots, \xi_k) = (E_{i_1}, \ldots, E_{i_k}),\ (\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_{k-1}) = (\overline{E}_{j_1}, \ldots, E_{j_{k-1}}), \eta = F_j\} \cdot$$

$$\cdot \mathbf{P}\{(\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_{k-1}) = (\overline{E}_{j_1}, \ldots, \overline{E}_{j_{k-1}}) \mid (\xi_1, \ldots, \xi_k) = (E_{i_1}, \ldots, E_{i_k}),\ \eta = F_j\} =$$

$$= r(j_k \mid i_1, \ldots, i_k;\ j_1, \ldots, j_{k-1}) \cdot$$

$$\cdot \mathbf{P}\{(\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_{k-1}) = (\overline{E}_{j_1}, \ldots, E_{i_{k-1}}) \mid (\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}) = (E_{i_1}, \ldots, E_{i_{k-1}}),\ \eta = F_j\} =$$

$$= \prod_{\alpha=1}^{n} r(j_\alpha \mid i_1, \ldots, i_\alpha;\ j_1, \ldots, j_{\alpha-1}), \tag{31}$$

что и требовалось доказать.

Применяя равенство (29) при $k = n$, видим, что последовательность величин η, ξ, $\bar{\xi}$ образует цепь Маркова. Рассуждая так же, как при выводе формулы (28), обнаруживаем, что в случае передачи без использования обратной связи

$$I(\eta, \bar{\xi}) \leqslant I(\xi, \bar{\xi}). \tag{32}$$

Применяя снова равенство (29) при $k = n$, находим, что

$$\mathbf{P}\{(\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_n) = (\bar{E}_{j_1}, \ldots, \bar{E}_{j_n}) \mid (\xi_1, \ldots, \xi_n) = (E_{i_1}, \ldots, E_{i_n})\} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} r(j_k \mid i_1, \ldots, i_k;\ j_1, \ldots, j_{k-1}) \tag{33}$$

Из равенств (2) и (4) вытекает, что

$$r(j_k \mid i_1, \ldots, i_k;\ j_1, \ldots, j_{k-1}) = \frac{\sum_{j_{k+1}, \ldots, j_n} p(j_1, \ldots, j_n \mid i_1, \ldots, i_n)}{\sum_{j_{k+1}, \ldots, j_n} p(j_1, \ldots, j_n \mid i_1, \ldots, i_n)}. \tag{34}$$

Подставляя (34) в равенство (33), находим, что

$$\mathbf{P}\{(\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_n) = (\bar{E}_{j_1}, \ldots, E_{j_n}) \mid (\xi_1, \ldots, \xi_n) = (E_{i_1}, \ldots, E_{i_n})\} =$$

$$= p(j_1, \ldots, j_n \mid i_1, \ldots, i_n). \tag{35}$$

Равенство (35) показывает, что в случае передачи без использования обратной связи величины ξ и $\bar{\xi}$ связаны каналом длины n, и поэтому из определения пропускной способности (10) следует, что

$$I(\xi, \bar{\xi}) \leqslant C^{(n)}. \tag{36}$$

Из неравенств (36), (32) и (28) вытекает, что

$$I(\eta, \bar{\eta}) \leqslant C^{(n)}.$$

Тем самым мы доказали теорему Шеннона, сформулированную в разделе 3.

6. Вывод формул для пропускной способности канала без памяти и рандомизированного канала без памяти при отсутствии обратной связи. Мы начнем с доказательства следующего важного факта. Если $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_n)$ — две случайные величины, связанные каналом без памяти, то

$$I(\xi, \bar{\xi}) \leqslant I(\xi_1, \bar{\xi}_1) + I(\xi_2, \bar{\xi}_2) + \ldots + I(\xi_n, \bar{\xi}_n). \tag{37}$$

Рассмотрим сначала случай $n = 2$. В этом случае формула тройной информации (27) показывает, что

$$I((\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2), (\xi_1, \xi_2)) = I(\bar{\xi}_1, (\xi_1, \xi_2, \bar{\xi}_2)) + I((\xi_1, \xi_2), \bar{\xi}_2) - I(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2). \tag{38}$$

Формула (3) для канала без памяти показывает, что

$$\mathbf{P}\{\bar{\xi}_1 = \bar{E}_{j_1} \mid \xi_1 = E_{i_1},\ \xi_2 = E_{i_2}, \bar{\xi}_2 = \bar{E}_{j_2}\} = p^{(1)}_{i_1 j_1},$$

$$\mathbf{P}\{\overline{\xi}_2 = \overline{E}_{j_2} \mid \xi_1 = E_{i_1},\ \xi_2 = E_{i_2}\} = p^{(2)}_{i_2 j_2}.$$

Следовательно величины $\overline{\xi}_1$, ξ_1, $(\xi_2, \overline{\xi}_2)$ и величины $\overline{\xi}_2$, ξ_2, ξ_1 образуют цепи Маркова. Тогда в соответствии с формулой (26)

$$I(\overline{\xi}_1, (\xi_1, \xi_2, \overline{\xi}_2)) = I(\xi_1, \overline{\xi}_1),$$
$$I((\xi_1, \xi_2), \overline{\xi}_2) = I(\xi_2, \overline{\xi}_2) \tag{39}$$

и из (38) и (39) вытекает (37) при $n = 2$. Для того чтобы обобщить эту формулу на произвольное n достаточно заметить, что четыре величины $\xi_1' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, $\overline{\xi}_1' = (\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_{n-1})$, $\xi_2' = \xi_2$ и $\overline{\xi}_2' = \overline{\xi}_2$ образуют канал без памяти, так что в соответствии с доказанным выше

$$I((\xi_1, \ldots, \xi_n), (\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_n)) \leqslant I((\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}), (\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_{n-1})) + I(\xi_n, \overline{\xi}_n). \tag{40}$$

Применяя индукцию, выводим из (40) искомое неравенство (37).

Применим теперь (37) к выводу формулы (10) для пропускной способности канала без памяти. Так как если $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $(\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_n)$ связаны каналом, то

$$\mathbf{P}\{\overline{\xi}_k = E_{j_k} \mid \xi_k = E_{i_k}\} = p^{(k)}_{ij},$$

то $I(\xi_k, \overline{\xi}_k) \leqslant D_k$ (см. (12)), откуда следует, в соответствии с (37), что

$$I(\xi, \overline{\xi}) \leqslant D_1 + \ldots + D_n = C^{(n)}. \tag{41}$$

Чтобы доказать, что в (41) достигается знак равенства, достаточно заметить, что, обозначив $\widetilde{p}_i^{(k)}$ набор вероятностей p_i, для которых достигается верхняя грань D_k в (12), и взяв в качестве ξ, $\overline{\xi}$ величины с совместным распределением

$$\mathbf{P}\{\xi = (E_{i_1}, \ldots, E_{i_n}), \overline{\xi} = (E_{j_1}, \ldots, E_{j_n})\} = \prod_{k=1}^{n} \widetilde{p}_i^{(k)} p^{(k)}_{i_k j_k},$$

мы получим величины, связанные каналом, для которых

$$I(\xi, \overline{\xi}) = D_1 + \ldots + D_n = C^{(n)}.$$

Пусть теперь $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $\overline{\xi} = (\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_n)$ — случайные величины, связанные рандомизированным каналом без памяти длины n, а α — случайная величина, использованная в определении рандомизированного канала без памяти. Заметим, применяя формулу условной информации (20), что

$$I((\overline{\xi}, \alpha), \xi) = I(\xi, \overline{\xi}) + \mathbf{M}\, I(\alpha, \xi \mid \overline{\xi}) = I(\xi, \alpha) + \mathbf{M}\, I(\xi, \overline{\xi} \mid \alpha)$$

откуда вытекает, что

$$I(\xi, \overline{\xi}) = \mathbf{M}\, I(\overline{\xi}, \xi \mid \xi) + I(\xi, \alpha) - \mathbf{M}\, I(\alpha, \xi \mid \overline{\xi}). \tag{42}$$

Заметим далее, что в силу общего неравенства (22) и неравенства (23)

$$I(\xi, \overline{\xi}) = \mathbf{M}\, I(\xi, \overline{\xi} \mid \alpha) + O(1), \tag{43}$$

где член $O(1)$ ограничен равномерно по всем парам ξ и $\overline{\xi}$ и n. Мы покажем ниже, что

$$\sup_{(\xi, \overline{\xi})} \mathbf{M}\, I(\xi, \overline{\xi} \mid \alpha) = n\overline{C} \tag{44}$$

(см. (16′)), где верхняя грань берется по всем парам случайных величин ξ и $\overline{\xi}$, связанных рандомизированным каналом без памяти длины n. Из (43) и (44) будет вытекать, очевидным образом, равенство (16). Воспользуемся теперь тем фактом, что при любом фиксированном условии $\alpha = a_k$ величины ξ и $\overline{\xi}$ связаны каналом без памяти с переходными вероятностями $p_{ij}^{(l)} = p_{ij}(a_k)$. Применяя неравенство (37) обнаруживаем, что

$$I(\xi, \overline{\xi} \mid \alpha = a_k) \leqslant I(\xi_1, \overline{\xi}_1 \mid \alpha = a_k) + I(\xi_2, \overline{\xi}_2 \mid \alpha = a_k) + \ldots + I(\xi_n, \overline{\xi}_n \mid \alpha = a_k). \tag{45}$$

Отсюда вытекает, что

$$\mathbf{M}\, I(\xi, \overline{\xi} \mid \alpha) \leqslant \sum_{e=1}^{n} \sum_{k} I(\xi_e, \overline{\xi}_e \mid \alpha = a_k)\, q(a_k), \tag{46}$$

причем знак равенства достигается в (45) и (46), если при любом условии вида $\alpha = a_k$ величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы. Для вывода искомого равенства (4) остается заметить, что

$$\sup_{\xi_e} \sum_{k} q(a_k)\, I(\xi_e, \overline{\xi}_e \mid \alpha = a_k) = \overline{C}$$

по определению величины $\overline{C}$ (см. (16′)), и что, взяв в качестве ξ набор $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ независимых величин ξ_e, имеющих распределение $\{p_i\}$, для которого достигается верхняя грань в (16′), и положив

$$\mathbf{P}\{\overline{\xi}_1 = E_{j_1}, \ldots, \overline{\xi}_n = E_{j_n} \mid \xi_1 = E_{i_1}, \ldots, \xi_n = E_{i_n}\} = p(j_1, \ldots, j_n \mid i_1, \ldots, i_n),$$

(см. (15)), мы получим пару величин $(\xi, \overline{\xi})$, связанных рандомизированным каналом без памяти длины n, такую, что

$$\mathbf{M}\, I(\xi, \overline{\xi} \mid \alpha) = n\overline{C}.$$

7. Передача информации с использованием обратной связи. Отметим, прежде всего, что метод, которым проведено в разделе 5 доказательство теоремы Шеннона о канале без обратной связи, существенно неприменим в случае канала с обратной связью. Дело в том, что в случае передачи с использованием обратной связи, даже для канала без памяти, сигналы на входе ξ и на выходе $\overline{\xi}$ могут не быть связанными каналом. В качестве примера, подтверждающего это утверждение, рассмотрим канал без памяти, заданный вероятностями перехода

$$p_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2} \tag{47}$$

при всех i, j и k. Это значит, что символ на выходе не зависит от соответствующего символа на входе. Ясно, что пропускная способность такого канала $C^{(n)} = 0$. В то же время, легко проверить, что если взять величины $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $\overline{\xi} = (\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_n)$ такие, что ξ и $\overline{\xi}$ не зависят от соотношений на входе η и на выходе $\overline{\eta}$, то при всех k

$$\mathbf{P}\{\xi_k = E_1\} = \mathbf{P}\{\xi_k = E_2\} = \mathbf{P}\{\overline{\xi}_k = E_1\} = \mathbf{P}\{\overline{\xi}_k = E_2\} = \frac{1}{2},$$

и что $\xi_k = \overline{\xi}_{k-1}$ и не зависит от всех остальных $\xi_i\,(i \neq k)$ и $\overline{\xi}_j\,(j \neq k-1)$, то такие четыре величины η, ξ, $\overline{\xi}$ и $\overline{\eta}$ будут удовлетворять условиям (6),

(7). Наглядно наше построение означает, что независимо от значения сообщения на входе по каналу передают в каждый момент времени сигнал, принятый на выходе в предыдущий момент времени. Ясно, что здесь

$$I(\xi, \overline{\xi}) = \sum_{k=2}^{n} I(\xi_k, \overline{\xi}_{k-1}) = n - 1 > C^{(n)} = 0.$$

Приступим теперь к доказательству основной теоремы о канале с обратной связью без памяти. Предположим, что сообщение на входе η переходит в сообщение на выходе $\overline{\eta}$ в результате передачи по каналу без памяти длины n с использованием обратной связи, и что ξ и $\overline{\xi}$ — соответствующие сигналы на входе и на выходе. Как мы уже отмечали, неравенство (28), гласящее, что

$$I(\eta, \overline{\eta}) \leqslant I(\eta, \xi), \tag{28'}$$

верно и для передачи с использованием обратной связи. Ввиду этого будем оценивать информацию

$$I(\eta, \overline{\xi}) = I(\eta, (\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_n)).$$

Применяя n-кратно формулу условной информации (20), выводим, что

$$I(\eta, \overline{\xi}) = I((\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_n), \eta) = I((\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_{n-1})\, \eta) + \mathbf{M} I(\overline{\xi}_n, \eta \,|\, (\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_{n-1})) =$$

$$= I((\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_{n-2}), \eta) + \mathbf{M} I(\overline{\xi}_{n-1}, \eta \,|\, (\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_{n-2})) + \mathbf{M} I(\overline{\xi}_n, \eta \,|\, (\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_{n-1})) =$$

$$= I(\overline{\xi}_1, \eta) + \mathbf{M} I((\overline{\xi}_2), \eta \,|\, \overline{\xi}_1) + \ldots + \mathbf{M} I(\overline{\xi}_n, \eta \,|\, (\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_{n-1})). \tag{48}$$

Равенство (6) показывает, что при условии, что $(\overline{\xi}_1 = \overline{E}_{j_1}, \ldots, \overline{\xi}_{k-1} = \overline{E}_{j_{k-1}})$ три случайных величины η, $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$, $\overline{\xi}_k$ образуют цепь Маркова. Поэтому из общих формул (21) и (25) следует, что

$$I(\overline{\xi}_k, \eta \,|\, \overline{\xi}_1 = \overline{E}_{j_1}, \ldots, \overline{\xi}_{k-1} = \overline{E}_{j_{k-1}}) \leqslant$$

$$\leqslant I(\overline{\xi}_k, (\eta, \xi_1, \ldots, \xi_k) \,|\, \overline{\xi}_1 = \overline{E}_{j_1}, \ldots, \overline{\xi}_{k-1} = \overline{E}_{j_{k-1}}) =$$

$$= I(\overline{\xi}_k, (\xi_1, \ldots, \xi_k) \,|\, \overline{\xi}_1 = \overline{E}_{j_1}, \ldots, \overline{\xi}_{k-1} = \overline{E}_{j_{k-1}}). \tag{49}$$

Используя равенства (6) и (5), обнаруживаем, что в случае канала без памяти

$$\mathbf{P}\{\overline{\xi}_k = \overline{E}_{j_k} \,|\, \xi_1 = E_{i_1}, \ldots, \xi_k = E_{i_k}, \overline{\xi}_1 = \overline{E}_{j_1}, \ldots, \overline{\xi}_{k-1} = \overline{E}_{j_{k-1}}\} = p^{(k)}_{i_k j_k}. \tag{50}$$

Это равенство означает, что три величины $(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1})$, ξ_k, $\overline{\xi}_k$ образуют при условии $(\overline{\xi}_1 = \overline{E}_{j_1}, \ldots, \overline{\xi}_{k-1} = \overline{E}_{j_{k-1}})$ цепь Маркова, и поэтому

$$I(\overline{\xi}_k (\xi_1, \ldots, \xi_k) \,|\, \overline{\xi}_1 = \overline{E}_{j_1}, \ldots, \overline{\xi}_{k-1} = \overline{E}_{j_{k-1}}) = I(\overline{\xi}_k, \xi_k \,|\, \overline{\xi}_1 = \overline{E}_{j_1}, \ldots, \overline{\xi}_{k-1} = \overline{E}_{j_{k-1}}) \tag{51}$$

Из равенства (50) следует, что

$$\mathbf{P}\{\bar{\xi}_k = \bar{E}_{j_k} \mid \xi_k = E_{i_k}, \bar{\xi}_1 = \bar{E}_{j_1}, \ldots, \bar{\xi}_{k-1} = \bar{E}_{j_{k-1}}\} = p_{i_k j_k}^{(k)}. \tag{52}$$

Поэтому из определения (12) вытекает, что условная информация

$$I(\xi_k, \bar{\xi}_k \mid \bar{\xi}_1 = \bar{E}_{j_1}, \ldots, \bar{\xi}_{k-1} = \bar{E}_{j_{k-1}}) \leqslant D_k. \tag{53}$$

Из (53), (51) и (49) вытекает, что

$$I(\xi_k, \eta \mid \bar{\xi}_1 = \bar{E}_{j_1}, \ldots, \bar{\xi}_{k-1} = \bar{E}_{j_{k-1}}) \leqslant D_k \tag{54}$$

при всех $k = 1, \ldots, n$. Применяя (54) и (48), выводим, что

$$I(\eta, \bar{\xi}) \leqslant D_1 + \ldots + D_n = C^{(n)}. \tag{55}$$

Неравенство (28′) показывает, что из неравенства (55) вытекает утверждение основной теоремы о канале с обратной связью без памяти.

Перейдем теперь к рассмотрению рандомизированных каналов без памяти. Мы хотим доказать теорему 3, сформулированную в разделе 3. Пусть сообщение η на входе переходит к сообщению на выходе $\bar{\eta}$ в результате передачи длины n с использованием обратной связи по рандомизированному каналу без памяти. Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots \xi_n)$ и $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_n)$—соответствующие сигналы на входе и на выходе. Здесь снова применима формула (28), показывающая, что

$$I(\eta, \bar{\eta}) \leqslant I(\eta, \bar{\xi}). \tag{56}$$

Рассуждая точно так же, как и при выводе равенства (42) (надо лишь заменить везде ξ на η), находим, что

$$I(\eta, \bar{\xi}) = \mathbf{M} I(\eta, \bar{\xi} \mid \alpha) + I(\eta, \alpha) - \mathbf{M} I(\alpha, \eta \mid \bar{\xi}). \tag{57}$$

Из наглядного вероятностного истолкования величины α следует* очевидным образом, что сообщение на входе η и параметр α являются независимыми величинами и что условие (6) можно заменить теперь условием

$$\mathbf{P}\{\bar{\xi}_k = \bar{E}_{j_k} \mid \xi_1 = E_{i_1}, \ldots, \xi_k = E_{i_k}, \bar{\xi}_1 = \bar{E}_{j_1}, \ldots, \bar{\xi}_{k-1} = \bar{E}_{j_{k-1}}, \eta = F_j, \alpha = a_e\} = p_{i_k j_k}(a_e). \tag{58}$$

Из независимости η и α следует, что $I(\eta, \alpha) = 0$ и поэтому, в соответствии с (57),

$$I(\eta, \bar{\xi}) \leqslant \mathbf{M} I(\eta, \bar{\xi} \mid \alpha). \tag{59}$$

При любом фиксированном условии $\alpha = a_e$ равенство (58) показывает, что величины η, ξ, $\bar{\xi}$ осуществляют передачу сообщения η по каналу без

* Формальным определением передачи по рандомизированному каналу без памяти с использованием обратной связи служат равенства (6) и (15). Поэтому строго говоря, нужно показать, что для любых трех величин η, ξ, $\bar{\xi}$, удовлетворяющих условиям (6) и (15), можно построить величину α с распределением $\{q(a_e)\}$ так, чтобы η и α были независимы и было верно равенство (58). Мы не приводим это несложное рассуждение ввиду его очевидности.

памяти, заданному переходными вероятностями $p_{ij}(a_e)$ с использованием обратной связи. Поэтому, повторяя рассуждение, проведенное в начале этого раздела, приходим к выводу, что

$$I(\eta, \bar{\xi} \mid \alpha = a_e) \leqslant nD(a_e), \tag{60}$$

где $D(a_e)$ — пропускная способность на единицу времени канала без памяти с переходными вероятностями $p_{ij}(a_e)$ (см. (18)). Из (60) следует, что

$$\mathbf{M}I(\eta, \bar{\xi} \mid \alpha) \leqslant n \sum_e q(a_e) D(a_e),$$

а отсюда и из неравенства (59) следует утверждение теоремы 3.

8. Некоторые примеры. Сравним для некоторых конкретных рандомизированных каналов без памяти пропускную способность на единицу времени $\bar{C}$ без использования обратной связи (см. (16′)) и пропускную способность на единицу времени $\bar{K}$ с использованием обратной связи (см. (18)).

Предположим, что число состояний на входе и на выходе равно 2, и что при любом значении параметра a_k матрица $p_{ij}(a_k)$ является симметричной, т. е. $p_{11}(a_k) \equiv p_{22}(a_k)$, $p_{12}(a_k) \equiv p_{21}(a_k)$. Тогда для всех k верхняя грань в выражении (18′) для $D(a_k)$ достигается при $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$. Поэтому при $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ выражение

$$\sum_k q(a_k) \sum_{i,j} p_i p_{ij}(a_k) \log \frac{p_{ij}(a_k)}{p_j(a_k)},$$

стоящее под знаком верхней грани в (16′), равно $\bar{K}$. Так как очевидно, что всегда $\bar{C} \leqslant \bar{K}$, то мы приходим к выводу, что для рассматриваемого примера $\bar{C} = \bar{K}$, т. е. использование обратной связи не дает выигрыша в пропускной способности. Аналогичное рассуждение проходит, конечно, в любом случае, когда оптимальное распределение сигнала на входе не зависит от параметра α. Если не предполагать симметричность матрицы вероятностей перехода, то оптимальное распределение будет зависеть от α, и использование обратной связи будет в этом случае давать выигрыш в пропускной способности.

Рассмотрим теперь пример канала, в котором использование обратной связи может существенно увеличить пропускную способность. Пусть состояния на входе $E_1, \ldots, E_n$, а на выходе $\bar{E}_1, \ldots, \bar{E}_n$. Пусть параметр α принимает n значений $a_1, \ldots, a_n$, каждое с вероятностью $\frac{1}{n}$. Предположим, что вероятности перехода $p_{ij}(a_k)$ задаются формулой

$$p_{i_1}(a_k) = \begin{cases} 0 & i \neq k, \\ 1 & i = k, \end{cases}$$

$$p_{i_2}(a_k) = \begin{cases} 1 & i = k. \\ 0 & i \neq k, \end{cases}$$

Тогда при любом фиксированном k пропускная способность $D(a_k)$ будет

равна $\frac{1}{2}$. Следовательно и пропускная способность на единицу времени с обратной связью

$$\overline{K} = \log 2.$$

С другой стороны (16′) принимает максимальное значение при $p_1 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$, и поэтому

$$\overline{C} = \frac{1}{n} \log n - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \log \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Выигрыш в пропускной способности $\frac{\overline{K} - \overline{C}}{\overline{K}}$ при небольших n невелик. При $n \to \infty$ величина $\overline{C} \sim \frac{\log n + 1}{n}$ и выигрыш стремится к 1.

Поступила в редакцию
3. 6. 58

ЛИТЕРАТУРА

[1] B. Bishop Walton, L., Bachanan Bobby, L., Message redundancy vs. feedback systems. IRE National Conventions Record, IRE National Convention Record, 1957, Part 2,3—10.
[2] Е. С. Горбунов, Сравнение некоторых помехоустойчивых кодов, Электросвязь, № 12 (1956), 42—47.
[3] А. Н. Колмогоров, Теория передачи информации, Сборник «Сессия Академии наук СССР по научным проблемам автоматизации производства», 15—20 октября 1956 г., Пленарные заседания, Изд. АН СССР, 1957, 66—99.
[4] А. Н. Колмогоров, Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега, ДАН, СССР, **119**, 5 (1958), 861—864.
[5] C. E. Shannon, The mathematical theory of communication, Bell. Syst. Techn. Journ., **27** (1948), 379—423, 623—656. Русск. перевод (неполн.) в сборн. «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех», Иниздат, М., 1953, 7—87.
[6] B. Harris, A. Hauptschein, L. S. Schwartz, Optimum decision feedback systems, IRE National Convention Record, 1957, Part 2, 3—10.
[7] А. Я. Хинчин, Об основных теоремах теории информации. Успехи матем. наук, **11**, № 1 (1956), 17—75.
[8] И. П. Цареградский, Замечание о пропускной способности стационарного канала с конечной памятью, Теория вероят. и ее примен., III, 1 (1958), 84—96.
[9] S. L. Chang Seldom, Theory of information feedback systems, IRE Trans. on Inform. Theory, vol. IT—2, No 3 (1956), 29—45.

TRANSMISSION OF INFORMATION IN CHANNELS WITH FEEDBACK

R. L. DOBRUSHIN (MOSCOW)

(Summary)

In this paper we prove that the use of feedback does not increase the capacity of channels without memory. We also consider some simple channels with memory and compare their capacities when feedback is and is not used.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том III Выпуск 4
1958

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ЗАДАННЫХ НА ОДНОРОДНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

И. С. ВОЛКОВ

Введение

Рассматривается простая однородная цепь Маркова с конечным числом состояний $E_i (1 \leqslant i \leqslant m)$ и дискретным временем. Пусть $e(0) = E_q$ начальное состояние, а $e(n)$ состояние цепи, соответствующее моменту времени n. На состояниях цепи задается однозначная функция $f(e(n))$, принимающая только целочисленные значения: $f(e(0)) = s_q^{(0)}$, $f(e(n)) = s_i$, если $e(n) = E_i$, $n \geqslant 1$, где s_i не зависит от n.

Целью данной работы является исследование асимптотического поведения при $n \to \infty$ вероятностей

$$P_{qj}(n, s(n)) = \mathbf{P}\left\{\sum_{k=0}^{n} f(e(k)) = s(n), e(n) = E_j \mid e(0) = E_q\right\} \tag{0.1}$$

$$F_{qj}(n, s(n)) = \mathbf{P}\left\{\sum_{k=0}^{n} f(e(k)) \leqslant s(n), e(n) = E_j \mid e(0) = E_q\right\} \tag{0.2}$$

в предположении существования предела $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{s(n)}{n}$. Результаты получаются применением метода перевала к явным выражениям для соответствующих производящих функций.

Автор признателен Б. А. Севастьянову за ценные указания.

§ 1. Нахождение явного выражения для $P_{qj}(n, s)$

Пусть $P = \| p_{ij} \|$ матрица переходных вероятностей в изучаемой цепи. Будем исходить из прямой системы конечно-разностных уравнений для $P_{qj}(n, s)$:

$$P_{qj}(n, s) = \sum_{i=1}^{m} P_{qi}(n-1, s-s_j)\, p_{ij}, \quad n \geqslant 1 \tag{1.1}$$

с начальными условиями:

$$P_{qj}(0, s) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = q \text{ и } s = s_q^{(0)} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Без ограничения общности можно считать $s_j \geqslant 0$, $s_q^{(0)} = 0$, поскольку добавление соответствующих констант компенсируется изменением $s(n)$ в (0.1), (0.2).

Введем производящие функции $U_{qj}(n, z) = \sum_{s=0}^{\infty} P_{qj}(n, s) z^s$. Обычными для цепей Маркова рассуждениями приходим к равенству

$$U_{qj}(n, z) = p_{qj}^{(n)}(z), \quad j = 1,2, \ldots, m; \quad n \geqslant 0,$$

где

$$\| p_{ij}^{(n)}(z) \| = \| p_{ij} z^{s_j} \|^n, \quad n \geqslant 1, \qquad p_{ij}^{(0)}(z) = \delta_{ij}.$$

Для выражения $p_{qj}^{(n)}(z)$ через элементы матрицы $P(z) = \| p_{ij} z^{s_j} \|$ воспользуемся формулой Перрона (см., например, [2]):

$$p_{qj}^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{m_k!} \frac{d^{m_k-1}}{d\lambda^{m_k-1}} \left[\frac{\lambda^n D_{qj}(z, \lambda)}{D_k(z, \lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_k(z)}. \tag{1.2}$$

Здесь $\lambda_k(z)$ при фиксированном z является корнем уравнения

$$|\lambda E - P(z)| = 0; \tag{1.3}$$

в любой односвязной области, не содержащей нулей дискриминанта многочлена $D(z, \lambda) = |\lambda E - P(z)|$, определим $\lambda_k(z)$ $(k = 0,1, \ldots, m-1)$ как однозначные аналитические ветви алгебраической функции, неявно заданной уравнением (1.3); $m_k = m_k(z)$ — число корней $\lambda_i(z)$ $(i = 0,1, \ldots, m-1)$, принявших значение $\lambda_k(z)$; $D_{qj}(z, \lambda)$ — алгебраическое дополнение к элементу $\lambda\delta_{jq} - p_{jq} z^{s_q}$ в матрице $\lambda E - P(z)$;

$$D_k(z, \lambda) = \frac{D(z, \lambda)}{[\lambda - \lambda_k(z)]^{m_k}}.$$

Так как $p_{qj}^{(n)}(z)$ является многочленом относительно z, то при произвольном $R > 0$ имеем точную формулу:

$$P_{qj}(n, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{p_{qj}^{(n)}(z)}{z^{s+1}} dz. \tag{1.4}$$

В дальнейшем для получения асимптотического разложения $P_{qj}(n, s(n))$ значение R будет выбрано специально.

§ 2. Исследование характеристических чисел матрицы $P(z)$

1°. Предположим, что цепь Маркова состоит из одного класса существенных состояний без подклассов [1]. В таком случае матрица P будет неразложимой, ациклической с неотрицательными элементами, и это же верно для матрицы $P(R)$ при $R > 0$. Согласно теореме Фробениуса, матрица $P(R)$ имеет простое положительное характеристическое число $\lambda_0 = \lambda_0(R)$, превосходящее модули всех других характеристических чисел; при этом

$$D_0(R, \lambda_0(R)) > 0, \quad D_{ij}(R, \lambda_0(R)) > 0, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant m.$$

При изучении спектральных свойств матрицы $P(z)$ в других точках окружности $|z| = R$ будем опираться на следующую лемму ([3], гл. XIII).

Если $A = \| a_{ik} \|$ *и* $B = \| b_{ik} \|$ *— две квадратные матрицы порядка* m, *причем* A *— неразложимая матрица и* $|b_{ik}| \leqslant a_{ik}$ $(1 \leqslant i,\ k \leqslant m)$, *то между любым характеристическим числом* ρ *матрицы* B *и максимальным характеристическим числом* λ *матрицы* A *имеет место неравенство* $|\rho| \leqslant \lambda$. *Равенство* $|\rho| = \lambda$ *возможно тогда и только тогда, когда* $B = e^{i\varphi} CAC^{-1}$, *где* $e^{i\varphi} = \frac{\rho}{\lambda}$, *а* C *— диагональная матрица, у которой абсолютные величины диагональных элементов равны единице.*

Очевидно, что матрицы $A = P(R)$ и $B = P(R \cdot e^{i\alpha})$ (α — действительное число) удовлетворяют условиям данной леммы. Следовательно,

$$|\lambda_k (R \cdot e^{i\alpha})| \leqslant \lambda_0 (R);\ k = 0, 1, \ldots, m-1, \qquad (2.1)$$

причем необходимым и достаточным условием равенства в (2.1) является возможность равенства

$$\| p_{kj} \cdot R^{s_j} \cdot e^{i(\varphi + \varepsilon_k - \varepsilon_j)} \| = \| p_{kj} \cdot R^{s_j} \cdot e^{i\alpha s_j} \|, \qquad (2.2)$$

где положено $C = \| \delta_{kj} \cdot e^{i\varepsilon_k} \|$, ε_k - неизвестные действительные числа.

Система уравнений (2.2) эквивалентна системе сравнений:

$$\varphi + \varepsilon_k - \varepsilon_j \equiv \alpha s_j \pmod{2\pi} \qquad (2.3)$$

для тех k и j, для которых $p_{kj} > 0$.

2°. Чтобы сформулировать условия, при которых система (2.3) имеет нетривиальные решения, дадим следующие определения.

Последовательность состояний

$$(E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_s}) \qquad (2.4)$$

называется *цепочкой*, если $p_{i_j i_{j+1}} > 0$ $(m - 1 \geqslant j \geqslant 1)$.

Цепочка (2.4) называется *циклом*, если $p_{i_s i_1} > 0$. В дальнейшем, если это не оговаривается специально, будут рассматриваться лишь те цепочки, в которых все состояния различны.

Обозначим $g(i_1, i_2, \ldots, i_s)$ число состояний в цепочке (2.4) и $f(i_1, i_2, \ldots, i_s)$ сумму $f(E_{i_1}) + f(E_{i_2}) + \ldots + f(E_{i_s})$.

Пользуясь отсутствием подклассов в данной цепи, выберем некоторое число h циклов с взаимно-простыми длительностями и обозначим их совокупность H.

Для цикла (2.4), принадлежащего H, и любого другого цикла $(E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_t})$ образуем числовую характеристику

$$C(i_1, i_2, \ldots, i_s, j_1, j_2, \ldots, j_t) = f(i_1, \ldots, i_s) \cdot g(j_1, \ldots, j_t) - g(i_1, \ldots, i_s) f(j_1, \ldots, j_t).$$

Пусть d — общий наибольший делитель всех $C(i_1, i_2, \ldots, i_s, j_1, j_2, \ldots, j_t)$. Будем считать $d = \infty$, если все $C(i_1, i_2, \ldots, i_s, j_1, j_2, \ldots, j_t)$ равны нулю.

В этих терминах имеют место следующие утверждения.

Лемма 1. *Значения* (α, φ) *входят в состав решения системы* (2.3) *тогда и только тогда, когда они удовлетворяют системе*

$$\alpha x^i \equiv \varphi y_i \pmod{2\pi}, \qquad (2.5)$$

где x_i пробегает значения $f(i_1, i_2, \ldots, i_s)$ для циклов (2.4), *а y_i соответственно принимает значения $g(i_1, i_2, \ldots, i_s)$.*

Лемма 2. *Если $d < \infty$, то система* (2.5) *имеет d пар решений (α_N, φ_N), различных по* $\bmod 2\pi$: $\alpha_N \equiv 2\pi\frac{N}{d} \pmod{2\pi}$,

$\varphi_N \equiv \alpha_N T \pmod{2\pi}$ $(N = 0, 1, \ldots, d-1)$; *T — некоторое целое число.*

Если $d = \infty$, то сравнения (2.5) *удовлетворяются при любом α и $\varphi \equiv \alpha T \pmod{2\pi}$.*

Лемма 3. *Если $d < \infty$, то* $\sum\limits_{(\alpha,\varphi)} e^{i(\alpha X - \varphi Y)} = \begin{cases} d & \text{в случае } X \equiv TY \pmod d \\ 0 & \text{в случае } X \not\equiv TY \pmod d, \end{cases}$

где X и Y произвольные целые числа, а суммирование производится по парам (α, φ) — решениям системы (2.5).

Доказательство леммы 1. Необходимость. Выпишем из системы (2.3) сравнения, соответствующие переходным вероятностям цикла (2.4), и сложим их. Получим

$$0 \equiv \alpha f(i_1, i_2, \ldots, i_s) - \varphi g(i_1, i_2, \ldots, i_s) \pmod{2\pi},$$

то есть систему (2.5).

Достаточность. Пусть α и φ являются решениями системы (2.5). Тогда для любых двух цепочек $(E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_s})$ и $(E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_t})$ с общими концами $i_1 = j_1$; $i_s = j_t$ будет выполняться

$$\alpha f(i_1, i_2, \ldots, i_s) - \varphi g(i_1, i_2, \ldots, i_s) \equiv \alpha f(j_1, j_2, \ldots, j_t) - \varphi g(j_1, j_2, \ldots, j_t) \pmod{2\pi} \tag{2.6}$$

Зададим $\varepsilon_1 = 0$ и определим остальные ε_i по формулам

$$\varepsilon_{i_1} \equiv \alpha f(i_2, \ldots, i_s) - \varphi g(i_2, \ldots, i_s) \pmod{2\pi}, \tag{2.7}$$

где $(E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_s})$ цепочка, соединяющая E_{i_1} с $E_{i_s} = E_1$. Соотношения (2.6) гарантируют однозначность такого определения.

Если $p_{i_1 i_1}$, то, выбирая в (2.7) $i_2 = j_1$, получаем $\varepsilon_{i_1} \equiv \alpha s_{j_1} - \varphi + \varepsilon_{j_1} \pmod{2\pi}$, что и требовалось доказать.

Доказательство леммы 2. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_h$ — длительности циклов из H; тогда найдутся такие целые числа $v_1, v_2, \ldots, v_h$, что $\sum\limits_{j=1}^{h} y_j v_j = 1$. Умножив в (2.5) j-ое сравнение на v_j $(1 \leqslant j \leqslant h)$ и сложив полученные результаты, будем иметь $\varphi \equiv \alpha T \pmod{2\pi}$, где $T = \sum\limits_{j=1}^{h} x_j v_j$. Исключая φ из сравнений (2.5), приходим к системе сравнений для α

$$\alpha(x_i - Ty_i) \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Общее решение этой системы имеет вид $\alpha = 2\pi\frac{N}{О.Н.Д.\{x_i - Ty_i\}}$, если не все $x_i - Ty_i$ равны нулю. Тот факт, что

$$О.Н.Д.\{x_i - Ty_i\} = d, \tag{2.8}$$

вытекает из тождеств:

$$x_iy_j - x_jy_i = (x_i - Ty_i)\,y_j - (x_j - Ty_j)\,y_i; x_i - Ty_i = \sum_{j=1}^{h} v_j(x_iy_j - x_jy_i)(1 \leqslant j \leqslant h).$$

Доказательство леммы 3. Справедливость утверждения леммы 3 вытекает из леммы 2 и известного свойства корней из единицы.

3°. Таким образом, установлено, что в случае $d < \infty$ на окружности $|z| = R$ равенство в (2.1) достигается ровно при d значениях $\alpha = \alpha_N (N = 0,1,\ldots,d-1)$, не зависящих от R. Вследствие этого:

а) на лучах $\arg z = \alpha_N (N = 0,1,\ldots,d-1)$ выполняется

$$\lambda_0(Re^{i\alpha_N}) = e^{i\varphi_N}\lambda_0(R)$$

$$D_0(Re^{i\alpha_N}, \lambda_0(Re^{i\alpha_N})) = e^{i(m-1)\varphi_N}\cdot D_0(R, \lambda_0(R))$$

$$D_{kj}(Re^{i\alpha_N}, \lambda_0(Re^{i\alpha_N})) = e^{i\,[\alpha_N(f(k,\ldots,j)-s_k)-\varphi_N(g(k,\ldots,j)-m)]}\cdot D_{kj}(R,\lambda_0(R));$$

б) найдутся такое число $\varepsilon > 0$ и такие дуги $L_R^{(N)} (N = 0,1,\ldots,d-1)$ на окружности $|z| = R$, что:

для $z \in L_R^{(N)}$ будет $|\lambda_j(z)| < |\lambda_0(z)| - \varepsilon$ $(j = 1,2,\ldots,m-1)$, причем функции $\lambda_0(z)$, $\dfrac{D_{ik}(z,\lambda_0(z))}{D_0(z,\lambda_0(z))}$ $(1 \leqslant i,k \leqslant m)$ аналитичны;

для $z \overline{\in} L_R^{(N)}$, $|z| = R$ будет $|\lambda_j(z)| < \lambda_0(R) - \varepsilon$ $(j = 0,1,\ldots,m-1)$.

Вывод приведенных выше соотношений составляет основную часть доказательства следующего предложения:

Лемма 4. *При $n \to \infty$ и фиксированном z, $|z| = R$, имеют место асимптотические представления*

$$\frac{d^k}{dz^k}U_{qj}(n,z) = \begin{cases} \dfrac{d^k}{dz^k}\left[\dfrac{D_{qj}(z,\lambda_0(z))}{D_0(z,\lambda_0(z))}\right]\lambda_0^n(z) + o[(\lambda_0(R)-\varepsilon)^n], & \text{если } Z \in L_R^{(N)} \\ o[(\lambda_0(R)-\varepsilon)^n], & \text{если } Z \overline{\in} L_R^{(N)}. \end{cases}$$

Действительно, с помощью оценок б) п. 3° § 2 это утверждение легко выводится из формулы (1.2).

Применение леммы 4 к подинтегральному выражению в (1.4) дает

$$P_{qj}^{i}(n, s(n)) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{N=0}^{d-1}\int_{L_R^{(N)}}\frac{\lambda_0^n(z)}{z^{s(n)}}\frac{D_{qj}(z,\lambda_0(z))}{z\cdot D_0(z,\lambda_0(z))}\,dz + o\left[\frac{(\lambda_0(R)-\varepsilon)^n}{R^{s(n)}}\right]. \quad (2.9)$$

В дальнейшем будет предполагаться, что $s(n) = (\alpha + \tau_n)n$; здесь α действительное число, $\tau_n \to 0$ при $n \to \infty$. Порядки роста $s(n)$ выше первого в однородных цепях Маркова с конечным числом состояний невозможны.

§ 3. Свойства функции $\dfrac{\lambda_0(z)}{z^\alpha}$.

1°. Как это следует из п. 3° § 2, $\lambda_0(z)$ является аналитической функцией z на $(0+\infty)$. Изучим теперь поведение $\lambda_0(z)$ при $z \to +0$. С этой целью запишем уравнение (1.3) в развернутом виде

$$\lambda^m + \sum_{(k,l)} A_{kl} z^k \lambda^{m-l} = 0, \quad m \geqslant l \geqslant 1, \quad k \geqslant 0.$$

Здесь

$$A_{kl} = P_{i_1 i_2} \cdot P_{i_2 i_3} \ldots P_{i_s i_1} \cdot (-1)^s \ldots p_{j_1 j_2} p_{j_2 j_3} \ldots p_{j_t j_1} (-1)^t,$$

$$k = f(i_1, i_2, \ldots, i_s) + \ldots + f(j_1, j_2, \ldots, j_t);$$

$$l = g(i_1, i_2, \ldots, i_s) + \ldots + g(j_1, j_2, \ldots, j_t).$$

Будем называть величину $\frac{f(i_1, i_2, \ldots, i_s)}{g(i_1, i_2, \ldots, i_s)}$ *удельным весом цикла* (2.4).

Пусть $\min\limits_{A_{kl} \neq 0} \frac{k}{l} = \frac{f}{g} = \delta$; $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$, О.Н.Д. $\{f, g\} = 1$. Производя замену $z = x^g$, $\lambda(z) = \nu(x) \cdot x^f$ и переходя к пределу при $x \to 0$, получаем $\lim\limits_{z \to +0} \frac{\lambda_0(z)}{|z^{\frac{f}{g}}|} = \nu_0(0)$, где $\nu_0(0)$ равно наибольшему из значений неотрицательных корней уравнения $\nu^m + \sum\limits_{kg - lf = 0} A_{kl} \nu^{m-l} = 0$. Важно знать, не может ли $\nu_0(0)$ равняться нулю. Это позволяет выяснить

Лемма 5.

$$\nu^m + \sum_{kg - lf = 0} A_{kl} \nu^{m-l} = |\nu E - P_0|,$$

где матрица P_0 получается из P посредством замены на нули вероятностей тех переходов, которые не содержатся ни в одном из циклов с минимальным удельным весом δ.

Доказательство. Очевидно, что в разложении $|\nu E - P_0|$ присутствуют ν^m и все $A_{kl} \nu^{m-l}$ с $kg - lf = 0$; главное — показать, что там нет других членов. Предположим противное: пусть существует цикл $(E_{j_1}, \ldots, E_{j_t})$, каждый переход $E_{j_i} \to E_{j_{i+1}} (t \geqslant i \geqslant 1, \; j_{t+1} = j_1)$ которого принадлежит некоторому циклу $(E_{j_i}, E_{j_{i+1}}, \ldots, E_{k_i})$ с удельным весом δ, но удельный вес самого цикла $(E_{j_1}, \ldots, E_{j_t})$ больше δ, то есть:

$$\frac{f(j_{i+1}, \ldots, k_i) + s_{j_i}}{g(j_{i+1}, \ldots, k_i) + 1} = \delta \quad (1 \leqslant i \leqslant t) \tag{3.1}$$

$$\frac{s_{j_1} + \ldots + s_{j_t}}{t} > \delta. \tag{3.2}$$

Здесь $\sum\limits_{i=1}^{t} g(j_{i+1}, \ldots, k_i) \neq 0$, так как иначе бы $s_{j_1} = s_{j_2} = \ldots = s_{j_t} = \delta$, что противоречит (3.2). Из (3.1) и (3.2) вытекает

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{t} f(j_{i+1}, \ldots, k_i)}{\sum\limits_{i=1}^{t} g(j_{i+1}, \ldots, k_i)} < \delta. \tag{3.3}$$

Рассмотрим теперь новый цикл, составленный из цепочек $(E_{j_{i+1}}, \ldots, E_{k_i})$, $1 \leqslant i \leqslant t$ (при этом возможны повторения состояний); его удельный вес

равен $\frac{\sum_{i=1}^{t} f(j_{i+1}, \ldots, k_i)}{\sum_{i=1}^{t} g(j_{i+1}, \ldots, k_i)}$. Следовательно, неравенство (3.3) невозможно.

Из доказанной леммы и теоремы Фробениуса (см. п. 1° § 2) вытекает, что $\nu_0(0) > 0$.

2°. Для изучения поведения $\lambda_0(z)$ при $z \to +\infty$ произведем замену в уравнении (1.3): $\frac{1}{z} = u$; $\lambda(z) z^M = \eta(u)$, где $M = \sum_{i=1}^{m} s_i$. Получим

$$|\eta E - \| p_{ij} u^{M-s_j} \| | = 0. \tag{3.4}$$

По доказанному в п. 1° § 3, максимальный корень уравнения (3.4) при достаточно малых u имеет вид $\eta(u) = cu^{\widetilde{\delta}} + o(u^{\widetilde{\delta}})$, где $\widetilde{\delta}$ — минимальный удельный вес циклов матрицы $\| p_{ij} u^{M-s_j} \|$. Легко видеть, что $\widetilde{\delta} = M - \Delta$, Δ — максимальный удельный вес циклов матрицы $\| p_{ij} z^{s_j} \|$, а постоянная c находится из тех же рассуждений, что и $\nu_0(0)$, с заменой лишь наименьшего удельного веса δ наибольшим Δ.

3°. Обратимся к функции $W_\alpha(z) = \frac{\lambda_0(z)}{z^\alpha}$; относительно ее свойств может быть высказано следующее утверждение:

Теорема 1. *Если* $d < \infty$, *то*

а) $W_\alpha(z)$ *является при* $0 < z < +\infty$ *аналитической функцией, принимающей только положительные значения;*

б) *максимум модуля* $W_\alpha(z)$ *на дуге окружности* $|z| = R$, $-\frac{2\pi}{d} < \arg z < \frac{2\pi}{d}$ *достигается в единственной точке* $z = R$;

в) $W_\alpha(z)$ *не имеет максимумов на* $(0, +\infty)$;

г) *при* $\delta < \alpha < \Delta$ *функция* $W_\alpha(z)$ *достигает минимума на* $(0, +\infty)$.

Если $d = \infty$, *то* $W_\delta(z) \equiv \text{const}$.

Доказательство.

а) Результат п. 3° § 2.

б) Вытекает из леммы 2.

в) Предположим, что в некоторой точке R функция $W_\alpha(z)$ достигает максимума на $(0, +\infty)$. Окружим точку R контуром C_R, состоящим из двух дуг окружностей радиусов $R \pm \varepsilon$ и двух отрезков лучей $0 < \arg z = \theta < \frac{2\pi}{d}$; $0 > \arg z = -\theta > -\frac{2\pi}{d}$. Величины ε и θ выберем так, чтобы построенный контур целиком находился в области аналитичности $W_\alpha(z)$. Из пункта б) настоящей теоремы следует, что значение модуля $W_\alpha(z)$ на контуре C_R меньше, чем во внутренней точке R, а это противоречит принципу максимума модуля аналитической функции.

г) Если $\delta < d < \Delta$, то из пп. 1°, 2° § 3 получаем: $W_\alpha(z) \to +\infty$ при $z \to +0$ и при $z \to +\infty$. Поэтому в некоторой точке r $(0 < r < +\infty)$ функция $W_\alpha(z)$ имеет минимум. Обозначение r для данной экстремальной точки сохраним и в дальнейшем.

В случае $d = \infty$, имеем $W_\delta(z) \equiv \nu_0(0)$ (см. п. 1° § 3).

4°. Ответ на вопрос о значении $W''_\alpha(r)$ содержит

Теорема 2.

$$W''_\alpha(r) = \frac{W_\alpha(r)}{r^2} \sum_{i,j} \frac{D_{ij}(r, \lambda_0(r))}{D_0(r, \lambda_0(r))} \cdot \frac{p_{ji}(r)}{\lambda_0(r)} \left(s_i - \frac{r\lambda'_0(r)}{\lambda_0(r)} + \theta_i - \theta_j\right)^2,$$

где

$$\theta_i = \sum_{h=1}^{m} \frac{D_{hi}(r, \lambda_0(r))}{D_{ii}(r, \lambda_0(r))} \cdot \left[s_h - \frac{r\lambda'_0(r)}{\lambda_0(r)}\right] \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{p_{ih}^{(n)}(r)}{\lambda_0^n(r)} - \frac{D_{ih}(r, \lambda_0(r))}{D_0(r, \lambda_0(r))}\right].$$

Доказательство этой теоремы проведем в несколько этапов. Начнем с установления связи между $W_\alpha(z)$ и $P_{qj}(n,s)$. Пусть $z > 0$. Имеем

$$\frac{W'_\alpha(z)}{W_\alpha(z)} = \frac{\lambda'_0(z)}{\lambda_0(z)} - \frac{\alpha}{z}; \quad \frac{W''_\alpha(z) W_\alpha(z) - W'^2_\alpha(z)}{W^2_\alpha(z)} = \frac{\lambda''_0(z)\lambda_0(z) - \lambda'^2_0(z)}{\lambda_0^2(z)} + \frac{\alpha}{z^2}.$$

Используя выражения для $\lambda_0^{(k)}(z)$ $(k = 0, 1, 2)$, даваемые леммой 4, после простых преобразований получаем:

$$\frac{W''_\alpha(z) W_\alpha(z) - W'^2_\alpha(z)}{W^2_\alpha(z)} = \frac{1}{z^2} \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{s=0}^{\infty} \left[s - n\frac{z\lambda'_0(z)}{\lambda_0(z)}\right]^2 \cdot P_{qj}(n,s)}{n \sum_{s=0}^{\infty} z^s \cdot P_{qj}(n,s)} + \frac{1}{z}\left(\frac{\alpha}{z} - \frac{\lambda'_0(z)}{\lambda_0(z)}\right).$$

Заметим, что отсюда следует: $W''_\alpha W_\alpha \geqslant W'^2_\alpha$, если $W'_\alpha(z) \leqslant 0$.

Вернемся к матрице $P(r)$. Вообще говоря, она не является стохастической. Однако при рассмотрении выражения

$$\sigma_n^2(r) = \frac{\sum_{s=0}^{\infty} \left[s - n\frac{r\lambda'_0(r)}{\lambda_0(r)}\right]^2 P_{qj}(n,s)}{\sum_{s=0}^{\infty} r^s P_{qj}(n,s)}$$

можно считать $\sum_{j=1}^{m} p_{ij} r^{s_j} \leqslant 1$ (так как $\sigma_n^2(r)$ не меняется от умножения всех $p_{ij} r^{s_j}$ на одно и то же число) и потому матрицу $P(r)$ можно дополнить до стохастической, окаймив ее одним столбцом и одной строчкой, все элементы которой, кроме последнего, равны нулю. Соответственно, к состояниям цепи $(E_1, E_2, \ldots, E_m)$ добавится поглощающее состояние E_{m+1}. Для $i, j \neq m+1$ переходные вероятности за n шагов в новой цепи равны $p_{ij}^{(n)}(r)$ (см. п. 1° § 1); поэтому, с точки зрения новой цепи, $\sigma_n^2(r)$ является условным математическим ожиданием случайной величины $(\chi_1 + \chi_2 + \ldots + \chi_n)^2$ при условии события $A = \{$за n шагов система перешла из E_q в $E_j\}$. Здесь $\chi_k = s_i - \frac{r\lambda'_0(r)}{\lambda_0(r)}$, если в новой цепи $e(k) = E_i$. В этой интерпретации вычисление $\sigma_n^2(r)$ может быть проведено с помощью известных правил теории вероятностей.

Для сокращения записей будем временно придерживаться обозначений:

$$\frac{p_{ij}^{(k)}(r)}{\lambda_0^k(r)} = \pi_{ij}^{(k)};\quad \pi_{ij}^{(1)} = \pi_{ij};\quad \frac{D_{ij}(r, \lambda_0(r))}{D_0(r, \lambda_0(r))} = \Pi_{ij};\quad u_i = s_i - \frac{r\lambda_0'(r)}{\lambda_0(r)}.$$

Имеем:

$$\mathbf{M}\{(\chi_1^2 + \ldots + \chi_n^2) \mid A\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\{\chi_k^2 \mid A\} + 2 \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \mathbf{M}\{\chi_k \chi_l \mid A\}.$$

Далее:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\{\chi_k^2 \mid A\} = \sum_{i=1}^{m} \frac{u_i^2}{\pi_{qj}^{(n)}} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \pi_{qi}^{(k)} \pi_{ij}^{(n-k)} \qquad (S_1)$$

$$2 \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \mathbf{M}\{\chi_k \chi_l \mid A\} = \sum_{i,h} \frac{2u_i u_h}{n\pi_{qj}^{(n)}} \cdot \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \pi_{qi}^{(k)} \Pi_{ih} \Pi_{hj} + \qquad (S_2)$$

$$+ \sum_{i,h} \frac{2u_i u_h}{n\pi_{qj}^{(n)}} \cdot \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \pi_{qi}^{(k)} \Pi_{ih} [\pi_{hj}^{(n-l)} - \Pi_{hj}] + \qquad (S_3)$$

$$+ \sum_{i,h} \frac{2u_i u_h}{n\pi_{qj}^{(n)}} \cdot \sum_{1 \leqslant k < l < n} \pi_{qi}^{(k)} [\pi_{ih}^{(l-k)} - \Pi_{ih}] [\pi_{hj}^{(n-l)} - \Pi_{hj}] + \qquad (S_4)$$

$$+ \sum_{i,h} \frac{2u_i u_h}{n\pi_{qj}^{(n)}} \cdot \sum_{1 \leqslant k < l < n} \pi_{qi}^{(k)} [\pi_{ij}^{(l-k)} - \Pi_{ih}] \Pi_{hj}. \qquad (S_5)$$

В целях большей связности последующих преобразований предпошлем им ряд вспомогательных предложений.

а) $\pi_{ij}^{(n)} \to \Pi_{ij}$ *при* $n \to \infty$, *причем ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} [\pi_{ij}^{(n)} - \Pi_{ij}]$ *абсолютно сходится к* S_{ij} (см. лемму 4).

б) $$\frac{d}{dz} D(z, \lambda) = \frac{\partial}{\partial z} D(z, \lambda) + \frac{\partial}{\partial \lambda} D(z, \lambda) \frac{d\lambda}{dz} = \sum_{i=1}^{m} \frac{s_i}{z} [D(z, \lambda) -$$

$$- \lambda D_{ii}(z, \lambda)] + \frac{d\lambda}{dz} \sum_{i=1}^{m} D_{ii}(z, \lambda) = 0,$$

откуда $\sum_{i=1}^{m} u_i \Pi_{ii} = 0$.

в) $\sum_k \Pi_{ik} \pi_{kj} = \Pi_{ij}$; $\sum_k \Pi_{kj} \pi_{ik} = \Pi_{ij}$. *Так как* $\lambda_0(r)$ *является простым собственным значением матрицы* $P(r)$, *то* $\frac{\Pi_{ik}}{\Pi_{jk}}, \frac{\Pi_{ki}}{\Pi_{kj}}$ *не зависят от* k;

г) Если $\lim_{n\to\infty} a_n = a$; $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, $|a|, |b| < \infty$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i}}{n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i (b_{n-i} - b)}{n} + b \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \right] = ab.$$

С учетом этих замечаний получаем:

$$\lim_{n\to\infty} S_1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{u_i^2}{\Pi_{qj}} \Pi_{qi}\Pi_{ij} = \sum_{i=1}^{m} u_i^2 \Pi_{ii}$$

$$S_2 = \frac{2}{n\pi_{qj}^{(n)}} \cdot \sum_{i=1}^{m} u_i \cdot \pi_{qi}^{(k)} \cdot \Pi_{ij} \cdot \sum_{h=1}^{m} u_h \cdot \Pi_{hh} = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} S_3 = 2 \sum_{i,h} \frac{u_i u_h}{\Pi_{qj}} \Pi_{qi}\Pi_{ih} S_{hj} = \frac{2}{\Pi_{jj}} \sum_{i} u_i \Pi_{ii} \sum_{h} \Pi_{jh} S_{hj} = 0$$

$\lim_{n\to\infty} S_4 = 0$, так как $\lim_{n\to\infty} \left| \sum_{1\leqslant k<l\leqslant n} \pi_{qi}^{(k)} [\pi_{ih}^{(l-k)} - \Pi_{ih}] [\pi_{hj}^{(n-l)} - \Pi_{hj}] \right| < \infty$

$$\lim_{n\to\infty} S_5 = 2 \sum_{i,h} \frac{u_i u_h}{\Pi_{qj}} \Pi_{qi} S_{ih} \Pi_{hj} = 2 \sum_{i,h} u_i u_h \Pi_{hi} S_{ih}.$$

Итак, $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n^2(r)}{n} = \sum_{i=1}^{m} \Pi_{ii} u_i^2 + 2 \sum_{i,h} S_{ih} \Pi_{hi} u_i u_h = \sigma^2(r).$$

Наконец, придадим выражению $\sigma^2(r)$ вид суммы квадратов с неотрицательными коэффициентами. Предварительно докажем тождество

$$\sum_{i} \Pi_{ij} \pi_{ji} (\theta_i + u_i) = \Pi_{jj} \theta_j, \quad \text{где} \quad \theta_i = \sum_{h} S_{ih} \frac{\Pi_{hi}}{\Pi_{ii}} u_h.$$

Действительно, $$\sum_{i} \Pi_{ij} \pi_{ji} \theta_i = \sum_{i} \Pi_{ij} \pi_{ji} \sum_{h} S_{ih} \frac{\Pi_{hi}}{\Pi_{ii}} u_h =$$

$$= \sum_{h} \Pi_{hj} u_h \sum_{i} \pi_{ji} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\pi_{ih}^{(n)} - \Pi_{ih} \right] = \sum_{h} \Pi_{hj} u_h \sum_{n=1}^{\infty} \left[\pi_{jh}^{(n+1)} - \Pi_{jh} \right] =$$

$$= \sum_{h} \Pi_{hj} S_{jh} u_h - \sum_{h} \Pi_{hj} \pi_{jh} u_h = \Pi_{jj} \theta_j - \sum_{i} u_i \Pi_{ij} \pi_{ji}.$$

Дальнейшие преобразования не требуют пояснений.

$$\sigma^2(r) = \sum_{i=1}^{m} \Pi_{ii} u_i^2 + 2 \sum_{i,h} S_{ih} \Pi_{hi} u_i u_h = \sum_{i=1}^{m} \Pi_{ii} (u_i + \theta_i)^2 - \sum_{i=1}^{m} \Pi_{ii} \theta_i^2 =$$

$$= \sum_{i,j} \Pi_{ij} \pi_{ji} (u_i + \theta_i)^2 - \sum_{i,j} \Pi_{ij} \pi_{ji} \theta_j^2 = \sum_{i,j} \Pi_{ij} \pi_{ji} (u_i + \theta_i - \theta_j)^2 +$$

$$+ 2 \sum_{i,j} \Pi_{ij} \pi_{ji} (u_i + \theta_i - \theta_j) \theta_j = \sum_{i,j} \Pi_{ij} \pi_{ji} (u_i + \theta_i - \theta_j)^2. \qquad (3.5)$$

При $r = 1$ формула (3.5) приводит к форме Фреше для удельной дисперсии суммы случайных величин, заданных на цепи Маркова [7]. Подобно тому, как это сделано у Фреше, из (3.5) выводим: $W_\alpha''(r) = 0$ *тогда и только тогда, когда удельные веса всех циклов одинаковы.*

5°. Содержание п. 3° § 2 позволяет распространить с очевидными изменениями теоремы 1 и 2 на изучение свойств функции $W_\alpha(z)$ в окрестностях точек $Re^{i\alpha_N}$ ($N = 1, \ldots, d-1$). Так получаем:

а) *функция* $W_\alpha(z)$ *аналитична на лучах* $\arg z = \alpha_N$; $0 < |z| < +\infty$;

б) $|W_\alpha(z)| < |W_\alpha(Re^{i\alpha_N})|$ *для* $|z| = R$, $0 < |\arg z - \alpha_N| < \frac{2\pi}{d}$;

в) $W_\alpha^{(k)}(Re^{i\alpha_N}) = e^{i[\gamma N - (\alpha+k)\alpha_N]} \cdot W_\alpha^{(k)}(R)$,

откуда $W_\alpha'(re^{i\alpha_N}) = 0$; $W_\alpha''(re^{i\alpha_N}) \neq 0$, *если* $\delta \neq \Delta$.

Эти результаты показывают, что при $\delta < \alpha < \Delta$ ко всем интегралам в (2.9) применим метод перевала.

§ 4. Локальная и интегральная предельные теоремы

1°. Если $\delta = \Delta$, то величины $f(i_1, i_2, \ldots, i_s) - Tg(i_1, i_2, \ldots, i_s)$ зависят лишь от конечных состояний E_{i_1}, E_{i_s} цепочки (2.4). Поэтому

$$P_{qj}(n, s) = \begin{cases} p_{qj}^{(n)}(1), & \text{если } f(E_q, \ldots, E_j) - T \cdot g(E_q, \ldots, E_j) = s(n) - T \cdot n \\ 0 & \text{в противоположном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что здесь δ, Δ равняются целому числу T (см. доказательство леммы 2).

2°. Пусть $\delta \neq \Delta$. В этом случае вывод асимптотических формул для $P_{qj}(n, s)$ основывается на следующих двух леммах.

Лемма 6. *Если* $\delta < \alpha < \Delta$, $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = 0$ *и выполнено одно из условий:*

а) $\gamma = 1$; б) $\gamma = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \inf |\tau_n| \sqrt{n} > 0$, *то при* $n \to \infty$

$$\int\limits_{L_{r_n}^{(N)}} \left[\frac{\lambda_0(z)}{z^{\alpha+\tau_n}}\right]^n \cdot \frac{D_{qj}(z, \lambda_0(z))}{zD_0(z, \lambda_0(z))} \cdot \frac{dz}{(z - re^{i\alpha_N})^{1-\gamma}} = \left[\frac{\lambda_0(r_n \cdot e^{i\alpha_N})}{(r_n \cdot e^{i\alpha_N})^{\alpha+\tau_n}}\right]^n \times$$

$$\times \frac{1}{[(r_n - r)e^{i\alpha_N}]^{1-\gamma}} \left\{\frac{1}{2} \sum_{l=0}^{k-1} \left(\frac{1}{n|\,b^{(N,n)}|}\right)^{\frac{l+1}{2}} \cdot e^{i(\alpha_N - \frac{\pi}{2})(l+1)} \sum_{j=0}^{l} \frac{f_{lj}^{(N,n)}}{(-b^{(N,n)})^j} \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{K_0} e^{-t} \cdot t^{\frac{l+1}{2}+j-1} \cdot \frac{dt}{\left[1 - \frac{i\sqrt{t}}{(r_n - r)\sqrt{n\,|\,b^{(N,n)}|}}\right]^{1-\gamma}} + O\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{k+1}{2}}\right]\right\}.$$

Лемма 7. *Если* $\delta < \alpha < \Delta$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sup |\tau_n| \sqrt{n} < \infty$, *то при* $n \to \infty$

$$\int\limits_{K_r^{(N)}} \left[\frac{\lambda_0(z)}{z^{\alpha+\tau_n}}\right]^n \cdot \frac{D_{qj}(z, \lambda_0(z))}{z \cdot D_0(z, \lambda_0(z))} \cdot \frac{dz}{(z - r \cdot e^{i\alpha_N})^{1-\gamma}} = \left[\frac{\lambda_0(r \cdot e^{i\alpha_N})}{(r \cdot e^{i\alpha_N})^{\alpha+\tau_n}}\right]^n \times$$

$$\times \left\{\frac{1}{2} \sum_{l=0}^{k-1} \left(\frac{1}{n|\,c^{(N)}|}\right)^{\frac{l+\gamma}{2}} e^{i(\alpha_N - \frac{\pi}{2})(l+\gamma)} \cdot \sum_{j=0}^{l} \frac{g_{lj}^{(N,n)}}{(-c^{(N)})^j} \cdot \int\limits_{K_1} \exp\left[-t\left(1 + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{\tau_n}{2|c^{(N)}|r^2}\right) + i\sqrt{t}\,\frac{\tau_n\sqrt{n}}{r\sqrt{|\,c^{(N)}|}}\right] t^{\frac{l+\gamma}{2}+j-1} dt + O\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{Re\gamma+k}{2}}\right]\right\}.$$

Здесь:

r_n для всех достаточно больших n находятся из условия

$$\frac{d}{du}[W_{\alpha+\tau_n}(u)]_{u=r_n}=0 \quad \text{(см. п. 3° § 3);}$$

$$b^{(N,n)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2}{du^2}[\log W_{\alpha+\tau_n}(u)]_{u\ r_n e^{i\alpha_N}};\ c^{(N)}=\frac{1}{2}\frac{d^2}{du^2}[\log W_\alpha(u)]_{u=re^{i\alpha_N}}\cdot$$

$$\cdot\frac{D_{qj}(z,\lambda_0(z))}{zD_0(z,\lambda_0(z))}\cdot\exp\left\{\frac{x}{(z-u)^2}\left[\cdot\log W_{\alpha+\tau_n}(z)-\log W_{\alpha+\tau_n}(u)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(z-u)\frac{d}{du}\log W_{\alpha+\tau_n}(u)-\frac{(z-u)^2}{2}\cdot\frac{d^2}{du^2}\cdot\log W_{\alpha+\tau_n}(u)\right]\right\}=$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{l}h_{lj}^{(n)}(u)(z-u)^l\cdot x^j,$$

для u и z достаточно близких к $re^{i\alpha_N}$ $(N=0,1,\ldots,d-1)$;

$$f_{lj}^{(N,n)}=h_{lj}^{(n)}(r_n e^{i\alpha_N});\ g_{lj}^{(N,n)}=h_{lj}^{(n)}(r\cdot e^{i\alpha_N}).$$

Путь интегрирования $K_R^{(N)}$ отличается от $L_R^{(N)}$ (см. п. 3° § 2) заменой дуги окружности $|z|=R$ в малой окрестности точки $R\cdot e^{i\alpha_N}$ на дугу окружности с центром в $R\cdot e^{i\alpha_N}$, проходимую в положительном направлении. Это не меняет величины интегралов в (2.9), позволяя в то же время достичь нужной для дальнейшего общности.

Контур K_R определяется условиями: а) $|z|=R\geqslant 0$; $0<\arg z<2\pi$; б) $R\leqslant|z|<+\infty$, $\arg z=0$; в) $R\leqslant|z|<+\infty$, $\arg z=2\pi$; k — произвольное натуральное число.

Доказательство этих утверждений, в силу §§ 2,3, сводится к непосредственному применению метода перевала, причем из формы записи результатов ясно, какие следует в данном случае внести изменения по сравнению с [4], [5]. В полученных асимптотических формулах можно произвести дальнейшие преобразования, если представить r_n, $q^{(N,n)}$, $f_{lj}^{(N,n)}$, $g_{lj}^{(N,n)}$ в виде рядов по степеням τ_n. Соответствующие выкладки проводятся так же, как в [5]; во избежание громоздких записей ограничимся здесь лишь самым необходимым, тем более что вывод полных разложений не представляет затруднений.

$$\log W_{\alpha+\tau_n}(r_n)=\log W_\alpha(r)-\tau_n\log r-\frac{\tau_n^2}{2\sigma^2(r)}+\sum_{k=3}^{\infty}d_k(r)\tau_n^k,$$

где ряд $\sum_{k=3}^{\infty}d_k(r)\tau_n^k$ сходится для достаточно малых τ_n;

$$r_n=r+\frac{r}{\sigma^2(r)}\tau_n+O(\tau_n^2)$$

$$b^{(N,n)}=\frac{\sigma^2(re^{i\alpha_N})}{2\cdot(re^{i\alpha_N})^2}+O(\tau_n);$$

$$f_{lj}^{(N,n)}=\frac{D_{lj}(re^{i\alpha_N},\lambda_0(re^{i\alpha_N}))}{re^{i\alpha_N}D_0(re^{i\alpha_N},\lambda_0(re^{i\alpha_N}))}+O(\tau_n);$$

$$g_{lj}^{(N,n)} = \frac{D_{lj}\left(re^{i\alpha_N}, \lambda_0\left(re^{i\alpha_N}\right)\right)}{re^{i\alpha_N} D_0\left(re^{i\alpha_N}, \lambda_0\left(re^{i\alpha_N}\right)\right)} + O(\tau_n).$$

В итоге проведенных рассуждений может быть сформулирована

Теорема 3. *Пусть* $\delta < \alpha < \Delta$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$P_{qj}(n, (\alpha + \tau_n) n) = \frac{d}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(r)} \cdot \frac{D_{qj}(r, \lambda_0(r))}{D_0(r, \lambda_0(r))} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\frac{\lambda_0(r)}{r^{\alpha+\tau_n}}\right]^n \times$$

$$\times \exp\left\{n\left[-\frac{\tau_n^2}{2\sigma^2(r)} + \sum_{k=3}^{\infty} d_k(r)\,\tau_n^k\right]\right\}\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) + O(\tau_n)\right]$$

для тех n, *для которых выполнено условие*

$$s(n) - f(q, \ldots, j) - s_q \equiv T(n - g(q, \ldots, j) + 1) \pmod d; \qquad (4.1)$$

$P_{qj}(n, (\alpha + \tau_n) n) = 0$ *если* (4.1) *не выполнено.*

Доказательство. На основании (2.9) и леммы 6 (в случае $\gamma = 1$) имеем

$$P_{qj}(n, (\alpha + \tau_n) n) = \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{\lambda_0(r_n)}{r_n^{\alpha+\tau_n}}\right]^n \left\{\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{k-1}\left(\frac{1}{nb^{(0,n)}}\right)^{l+\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}(2l+1)} \times\right.$$

$$\times \sum_{j=0}^{2l} \frac{f_{2l,j}^{(0,n)}}{(-b^{(0,n)})^j}(-2)\,\Gamma\left(l - j + \frac{1}{2}\right) + O\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{k+\frac{1}{2}}\right]\Bigg\} \times$$

$$\times \sum_{N=0}^{d-1} \exp\{i(\varphi_N[n - g(q, \ldots, j) + 1] - \alpha_N[s(n) - f(q, \ldots, j) + s_q])\}.$$

при $n \to \infty$.

Согласно лемме 3, сумма

$$\sum_{N=0}^{d-1} \exp\{i(\varphi_N[n - g(q, \ldots, j) + 1] - \alpha_N[s(n) - f(q, \ldots, j) + s_q])\}$$

принимает значение d или 0, если, соответственно, выполнено или нарушено условие (4.1). Смысл условия (4.1) ясен из (2.8):

(4.1) выполняется тогда и только тогда, когда случайная величина $\sum_{k=0}^{n} f(e(k))$ может принять значение $s(n)$ с положительной вероятностью.

3. При доказательстве теоремы 3 не предполагалось, что $\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$. Принятие этого дополнительного условия дает:

$$\lambda_0(1) = 1; \quad W'_\alpha(1) = \lambda'_0(1) - \alpha = \sum_{i=1}^{m} s_i \frac{D_{ii}(1,1)}{\sum_{i=1}^{m} D_{ii}(1,1)}, \qquad (4.2)$$

где $\frac{D_{ii}(1,1)}{\sum_{i=1}^{m} D_{ii}(1,1)} = p_i$ — предельные вероятности попаданий в состояния E_i.

Из (4.2) и пп. в), г) теоремы 1 вытекает:

$$\text{если } \sum_{i=1}^{m} s_i p_i < \alpha, \quad \text{то } r > 1,\ \lambda_0(r) < 1,$$

$$\text{если } \sum_{i=1}^{m} s_i p_i = \alpha, \quad \text{то } r = 1,\ \lambda_0(r) = 1,$$

$$\text{если } \sum_{i=1}^{m} s_i p_i > \alpha, \quad \text{то } r < 1,\ \lambda_0(r) < 1.$$

В специальном случае $\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$, $\alpha = \sum_{j=1}^{m} s_j p_j$, $\tau_n = \frac{\tau}{\sqrt{n}}$ теорема 3 обобщает соответствующий результат из [6], так как не предполагает выполнения условия (В), введенного А. Н. Колмогоровым. В частности, при надлежащем выборе s_i, теорема 3 дает распределение вероятностей для числа попаданий в фиксированное состояние.

4°. Изложенный выше способ получения асимптотических формул для $P_{qj}(n, s(n))$ применим также к выводу интегральной предельной теоремы для $\sum_{k=0}^{n} f(e(k))$. Основанием для этого служит то обстоятельство, что $F_{qj}(n,s)$, как и $P_{qj}(n, s)$, удовлетворяют системе (1.1), хотя и с другими начальными условиями:

$$F_{qj}(0,s) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = q,\ s \leqslant 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что

$$\sum_{s=0}^{\infty} F_{qj}(n, s) \cdot z^s = \frac{1}{1-z}\, p_{qj}^{(n)}(z) \tag{4.3}$$

для $|z| < 1$ (см. § 1).

По принципу аналитического продолжения равенство (4.3) можно распространить на всю плоскость комплексного переменного z.

Формулы обращения в данном случае имеют вид

$$F_{qj}(n,s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|z| = R \\ R<1}} \frac{p_{qj}^{(n)}(z)}{z^{s+1}} \cdot \frac{dz}{1-z} = p_{qj}^{(n)}(1) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|z| = R \\ R>1}} \frac{p_{qj}^{(n)}(z)}{z^{s+1}} \cdot \frac{dz}{z-1}. \tag{4.4}$$

Если $\alpha \neq \sum_{i=1}^{m} s_i p_i$, то асимптотические разложения для интегралов в (4.4) получаются тем же путем, что и для интеграла в (1.4), поскольку дополнительный множитель $\frac{1}{1-z}$ не зависит от n и является аналитической функцией при $z \neq 1$.

Главные члены этих разложений равны

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\lambda_0(r)}{r^{\alpha+\tau_n}}\right]^n\cdot\frac{1}{\sqrt{n\sigma(r)}}\cdot\frac{D_{qj}(r,\lambda_0(r))}{D_0(r,\lambda_0(r))}\exp\left\{n\left[-\frac{\tau_n^2}{2\sigma^2(r)}+\sum_{k=3}^{\infty}d_k(r)\tau_n^k\right]\right\}\times$$

$$\times\sum_{N=0}^{d-1}\frac{1}{1-re^{i\alpha_N}}\cdot\exp\{i(\varphi_N[n-g(q,\ldots,j)+1]-\alpha_N[s(n)-f(q,\ldots,j)+s_q])\}.$$

Далее различаются два случая:

а) $r<1$; тогда

$$\sum_{N=0}^{d-1}\frac{1}{1-re^{i\alpha_N}}\exp\{i(\varphi_N[n-g(q,\ldots,j)+1]-\alpha_N[s(n)-f(q,\ldots,j)+s_q])\}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}r^k\sum_{N=0}^{d-1}\exp\{i(\varphi_N[n-g(q,\ldots,j)+1]-\alpha_N[s(n)-f(q,\ldots,j)+s_q-k])\}=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}r^{l_n+dj}d=\frac{d\cdot r^{l_n}}{1-r^d},$$

где l_n наименьшее натуральное число, при котором выполняется

$$T[n-g(q,\ldots,j)+1]\equiv s(n)-f(q,\ldots,j)+s_q-l_n\pmod d; \qquad (4.5)$$

б) $r>1$; тогда $\sum_{N=0}^{d-1}\frac{1}{1-re^{i\alpha_N}}\exp\{i(\varphi_N[n-g(q,\ldots,j)+1]-\alpha_N[s(n)-$

$$-f(q,\ldots,j)+s_q])\}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{r^k}\sum_{N=0}^{d-1}\exp\{i(\varphi_N[n-g(q,\ldots,j)+1]-\alpha_N[s(n)-$$

$$-f(q,\ldots,j)+s_q+k])\}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{d}{r^{d-l_n+dj}}=\frac{d\cdot r^{l_n}}{r^d-1}.$$

Из доказанного следует

Теорема 4. *Пусть* $\delta<\alpha<\Delta$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n=0$. *Тогда*:

а) *если* $\alpha<\sum_{i=1}^{m}s_ip_i$, *то при* $n\to\infty$

$$F_{qj}(n,(\alpha+\tau_n)n)=\frac{d}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma(r)}\cdot\frac{D_{qj}(r,\lambda_0(r))}{D_0(r,\lambda_0(r))}\cdot\frac{r^{l_n}}{1-r^d}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\times$$

$$\times\left[\frac{\lambda_0(r)}{r^{\alpha+\tau_n}}\right]^n\cdot\exp\left\{n\left[-\frac{\tau_n^2}{2\sigma^2(r)}+\sum_{k=3}^{\infty}d_k(r)\cdot\tau_n^k\right]\right\}\cdot\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)+O(\tau_n)\right],$$

б) *если* $\alpha>\sum_{i=1}^{m}s_ip_i$, *то при* $n\to\infty$

$$F_{qj}(n,(\alpha+\tau_n)n)=p_{qj}^{(n)}(1)-\frac{d}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma(r)}\cdot\frac{D_{qj}(r,\lambda_0(r))}{D_0(r,\lambda_0(r))}\cdot\frac{r^{l_n}}{r^d-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\times$$

$$\times\left[\frac{\lambda_0(r)}{r^{\alpha+\tau_n}}\right]^n\exp\left\{n\left[-\frac{\tau_n^2}{2\sigma^2(r)}+\sum_{k=3}^{\infty}d_k(r)\tau_n^k\right]\right\}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)+O(\tau_n)\right],$$

где l_n *задается согласно* (4.5).

Дополнением предыдущего результата служит

Теорема 5. *Пусть* $\alpha = \sum_{i=1}^{m} s_i p_i$, $\delta \neq \Delta$. Тогда:

а) *если* $\lim\limits_{n\to\infty} \sup |\tau_n| \sqrt{n} < \infty$, *то при* $n \to \infty$

$$F_{qj}(n, (\alpha + \tau_n) n) = \frac{p_j}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \int_{-\infty}^{\tau_n\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \left\{1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\};$$

б) *если* $\lim\limits_{n\to\infty} |\tau_n| \sqrt{n} = \infty$, *то при* $n \to \infty$

$$F_{qj}(n, (\alpha + \tau_n) n) = p_j \left\{\frac{1 + \operatorname{sign}\tau_n}{2} - \frac{\operatorname{sign}\tau_n}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \exp\left[-\frac{n\tau_n^2}{2\sigma^2} + \right.\right.$$

$$\left. + n\sum_{k=3}^{\infty} \tau_n^k d_k(1)\right] e^{\frac{n(r_n-1)^2\cdot\sigma^2}{2}} \cdot \int_{\sqrt{n}|r_n-1|\sigma^2}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \Big\} [1 + O(\tau_n)],$$

где $\sigma = \sigma(1)$.

Доказательство.

а) Возьмем в качестве контура интегрирования в формуле обращения (4.4) окружность $|z| = 1$, заменив в ней дугу $L_1^{(0)}$ на $K_1^{(0)}$ (см. лемму 7). Интегралы по $L_1^{(N)}$ ($N = 1,2,\ldots, d-1$) будут иметь вид, указанный в лемме 6, со значением $\gamma = 1$, причем вместо функции $\frac{D_{qj}(z, \lambda_0(z))}{zD_0(z, \lambda_0(z))}$ следует рассматривать функцию $\frac{D_{qj}(z, \lambda_0(z))}{zD_0(z, \lambda_0(z))} \cdot \frac{1}{1-z}$.

Главный член всего разложения определяется интегралом по $K_1^{(0)}$ (лемма 7, $\gamma = 0$), в асимптотическом представлении которого отсутствует множитель $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Наконец, обозначая $1 + \frac{\tau_n}{2c^{(0)}} = a > 0$; $\frac{\tau_n\sqrt{n}}{\sqrt{c^{(0)}}} = b$; имеем:

$$\int_{K_1} e^{-at+ib\sqrt{t}} \frac{dt}{t} = 2\pi i - 4\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot i \int_0^{\frac{b}{\sqrt{a}}} e^{-\frac{x^2}{a}} dx.$$

б) Условие $\lim\limits_{n\to\infty} |\tau_n| \sqrt{n} = \infty$ влечет: $r_n \neq 1$ для всех достаточно больших n. Следовательно, можно положить $R = r_n$ в (4.4) и применить к интегралам по $L_{r_n}^{(N)}$ лемму 7; при этом значениям $N = 1,2,\ldots, d-1$ отвечает $\gamma = 1$, а $N = 0$ значение $\gamma = 0$. Как и в пункте а) данной теоремы, главный член асимптотического представления $F_{qj}\left(n, \left(\sum_{i=1}^{m} s_i p_i + \tau_n\right) n\right)$ образуется лишь за счет разложения, соответствующего $N = 0$, и не зависит от арифметических соотношений вида (4.1).

Для завершения доказательства остается воспользоваться формулой:

$$\int_{K_0} e^{-t}\frac{dt}{t+ib\sqrt{t}} = 4\sqrt{\pi}\cdot i\cdot \operatorname{sign} b\cdot e^{b^2}\int_{|b|}^{+\infty} e^{-t^2}dt,\ b^2>0,$$

подставив в нее $b=(r_n-1)\sqrt{n|b^{(0,n)}|}$.

Поступила в редакцию
7. 5. 58.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Цепи Маркова с счетным множеством возможных состояний, Бюлл. М. ун-та, А, 1 : 3, (1937).
[2] В. И. Романовский, Дискретные цепи Маркова, ГИТТЛ, 1949.
[3] Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, ГИТТЛ, 1953.
[4] O. Perron, Über die näherungsweise Berechnung von Funktionen grosser Zahlen, Sitzungsberichte, München, 1917.
[5] В. Рихтер, Локальные предельные теоремы для больших уклонений, Теория вероят. и ее примен., II, вып. 2 (1957), 214—229.
[6] С. Х. Сираждинов, Уточнение предельных теорем для цепей Маркова, ДАН СССР, 84, 6 (1952).
[7] M. Fréchet, Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre finé d'états possibles, Paris, 1952.

ON THE DISTRIBUTION OF SUMS OF RANDOM VARIABLES DEFINED ON A HOMOGENEOUS MARKOV CHAIN WITH A FINITE NUMBER OF STATES

I. S. VOLKOV (MOSCOW)

(*Summary*)

Local and integral limit theorems are established for a non-periodical case. The results are given in the form of asymptotic eqpansions taking into account various possible values of the sums under consideration.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том III И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 4*
1958

ДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

Р. З. ХАСЬМИНСКИЙ

Введение

В работе М. В. Келдыша [1] был решен вопрос о том, как надо ставить первую краевую задачу для некоторого класса эллиптических уравнений, вырождающихся в параболические на участке Γ_0 границы области, для того чтобы получить единственное решение, удовлетворяющее граничным условиям.

Эти исследования были продолжены в работах [2], [3] и других для более общих классов уравнений и для других краевых задач. Однако во всех этих работах предполагается, что вырождаются (стремятся к нулю) лишь коэффициенты при вторых производных, причем вырождение это степенного характера.

В настоящей работе рассматривается вырождение без ограничения степенным порядком, причем вырождаться (быть неограниченными) могут и другие коэффициенты. Для простоты формулировок мы ограничиваемся случаем двух переменных, однако наши результаты легко переносятся на случай большего числа переменных.

Будем обозначать $x = (x_1, x_2)$ точку плоскости. Рассмотрим оператор

$$Lu = a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2\frac{\partial u}{\partial x_2}$$

в области D, ограниченной отрезком $[r_1, r_2] = \Gamma_0$ оси x_1 и кусочно-гладкой кривой Γ, расположенной в полуплоскости $x_2 > 0$. С помощью преобразования координат к такому виду можно привести и область более общего вида. Предположим, что каждой точки Γ можно коснуться конусом извне D. Пусть коэффициенты a_{ij} и b_i непрерывны в $D \cup \Gamma$, трижды дифференцируемы в D, причем третьи производные удовлетворяют условию Гельдера в D и $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ в $D \cup \Gamma$. При приближении к отрезку Γ_0 мы не накладываем никаких ограничений на коэффициенты (например, тип уравнения может вырождаться, коэффициенты могут быть неограниченными).

Рассмотрим область $D_\eta = D \cap \{x_2 > \eta\}$ с границей Γ_η. С оператором L тесно связан марковский случайный процесс $X^{(\eta)}({}^{(\eta)}X^1, {}^{(\eta)}X^2)$ с непрерывны-

ми траекториями в области D_η с обрыванием в момент достижения Γ_η. А именно, пусть $X^{(\eta)}$ — процесс с обрыванием в момент достижения Γ_η, расширение инфинитезимального оператора которого совпадает с L для дважды непрерывно дифференцируемых функций (условия существования такого процесса будут уточнены в § 1).

Изложим весьма кратко концепцию однородного по времени марковского случайного процесса в области G метрического пространства, которую мы используем. (Систематическое изложение имеется, например, в книге Е. Б. Дынкина [5].)

Пусть $\mathfrak{B}$ есть σ-алгебра множеств, порожденных открытыми множествами из G. Мы скажем, что задан марковский случайный процесс $X = \{X_t, \zeta, M_t, \mathbf{P}_x\}$, если заданы:

1) пространство $\Omega = \{\omega\}$ элементарных событий,

2) функция $\zeta(\omega)$ со значениями из $(0, \infty]$ — «момент обрывания процесса»,

3) функция $X_t(\omega)$ со значениями из G, определенная при $0 \leqslant t \leqslant \zeta(\omega)$, — «траектория» процесса,

4) σ-алгебра M_t пространства $\Omega_t = \{\zeta > t\}$,

5) система вероятностных мер $\mathbf{P}_x$, определенных на σ-алгебре $M \supseteq M_t$ при всех $t > 0$.

При этом должны выполняться такие условия:

а) $M_t \subseteq M_u$ при $t < u$,

б) $\{X_t \in \Gamma\} \in M_t$,

в) функция $\mathbf{P}_x\{X_t \in \Gamma\} = \mathbf{P}(t, x, \Gamma)$ измерима по x,

г) $\mathbf{P}(0, x, x) = 1$,

д) $\mathbf{P}_x\{X_{t+h} \in \Gamma \mid M_t\} = \mathbf{P}\{h, X_t, \Gamma\}$ для почти всех $\omega \in \Omega_t$.

Пусть теперь $X = \{X_t, \zeta, M_t, \mathbf{P}_x\}$ — марковский процесс с непрерывными траекториями в G. Пусть G_1 — область, содержащаяся в G. Определим случайную величину $\xi(\omega)$ соотношением:

$$\xi(\omega) = \sup\{t : X_u(\omega) \in G \text{ для всех } u \leqslant t\}.$$

Процесс $\widetilde{X} = \{\widetilde{X}_t, \xi, \widetilde{M}_t, \widetilde{\mathbf{P}}_x\}$ в области G_1 назовем частью процесса X, если $\widetilde{X}_t(\omega) = X_t(\omega)$ при $0 \leqslant t < \xi(\omega)$; $\widetilde{M}_t = \{M_t; \xi > t\}$; $\widetilde{M} = M$; $\widetilde{\mathbf{P}}_x = \mathbf{P}_x$ для $x \in G_1$ и $\mathbf{P}_x\{\widetilde{X}_t \in \Gamma\} = \mathbf{P}_x\{X_t \in \Gamma; \xi > t\}$.

Мы будем опираться на следующую теорему, доказательство которой будет дано в книге [5].

Теорема 0.1. *Пусть $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n \subset$ — последовательность областей и $\lim\limits_{n\to\infty} G_n = G$ (область G ограничена). Пусть в области G_n определен марковский процесс $X^{(n)} = \{X_t^{(n)}, \xi^{(n)}, M_t^{(n)}, \mathbf{P}_x^{(n)}\}$, причем $X^{(n-1)}$ является частью процесса $X^{(n)}$ в области G_{n-1}. Тогда в области G существует процесс $X = \{X_t, \xi, M_t, \mathbf{P}_x\}$ такой, что при любом n процесс $X^{(n)}$ является его частью на G_n, причем $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} \xi^{(n)}$.*

На основании теоремы 0.1 в области D существует процесс $X(X^1, X^2)$, для которого $X^{(\eta)}$ является частью в D_η и момент обрывания которого

$\tau = \lim\limits_{\eta \to 0} \tau_\eta$, где τ_η — момент обрывания процесса $X^{(\eta)}$. Заметим, что в нашем случае процесс X является строго марковским (см. [6])*.

Интересен вопрос о возможном предельном поведении траектории X_t процесса X при $t \to \tau$. Обозначим Γ^τ множество (случайное) предельных точек X_t при $t \to \tau$. Для всех точек $x_0 \in \Gamma$ выполняется соотношение:

$$\lim_{x \to x_0} \mathbf{P}_x \{\Gamma^\tau \subset \mathcal{U}_{x_0}\} = 1 \tag{1}$$

для любой окрестности $\mathcal{U}_{x_0}$ точки x_0**.

Кроме того, из непрерывности процесса X в D и выполнения условия 1) следует, что $\Gamma^\tau \subset \Gamma \cup \Gamma_0$ с вероятностью 1. (Нетрудно проверить, что множество траекторий, для которых $\Gamma^\tau \subset \Gamma_1$, где Γ_1 принадлежит σ-алгебре, порожденной открытыми множествами границы, измеримо.) Соотношение (1) может не выполняться для $x_0 \in \Gamma_0$. С этим и связаны видоизменения в постановке первой краевой задачи для уравнения

$$Lu = 0, \tag{2}$$

впервые отмеченные в [1].

В § 1 настоящей работы дается вероятностная запись решения первой краевой задачи для общего линейного эллиптического уравнения без вырождения. Далее, в § 2 введенные в [12] понятия притягивающей и отталкивающей границы обобщаются на многомерный случай и даются эффективные (в терминах коэффициентов уравнения) достаточные условия для этих типов границ, близкие к необходимым.

В § 3 более подробно изучается предельное поведение X_t при $t \to \tau$ и даются достаточные условия для различных постановок первой краевой задачи уравнения (2). Эти условия близки к необходимым и обобщают результаты [1].

В §§ 3 и 4 анализируются также поведение процесса X_t в случае, когда отрезок Γ_0 недостижим. В терминах дифференциальных уравнений это означает исследование поведения решения уравнения (2) при $x \to \Gamma_0$ в случае, когда на Γ_0 не нужно задавать граничных условий.

В § 5 разбирается пример, который показывает, что при невыполнении важного условия (Н) траектория X_t при $t = \tau$ может иметь разрыв второго рода с положительной вероятностью. С точки зрения дифференциальных уравнений это ведет к новой постановке первой краевой задачи для уравнения (2).

В § 6 разбираются примеры, показывающие, что теоремы 2.1, 2.2, 3.1 и 3.2 дают условия для различных типов границ, близкие к необходимым и достаточным.

---

* В [6] рассматривается процесс без обрывания, однако тем же методом можно доказать и строгую марковость процесса с обрыванием.

** Это может быть выведено, например, из результатов работы [7].

§ 1. Вероятностное представление решений эллиптических уравнений

Вероятностное представление решений параболических и эллиптических дифференциальных уравнений рассматривалось в работах [8], [7], из более новых в [9—12] и других. В частности, для уравнения (2) соответствующий результат доказан в [7]. Приведем более общую теорему, не ограничиваясь здесь двумерным случаем.

Пусть функции A_{ij}, B_i и D имеют две непрерывные производные в области G_0 n-мерного эвклидова пространства, а $(\!(A_{ij})\!)$ не вырождается в G_0. Пусть $G \subset G_0$ — область с кусочно-гладкой границей T, каждой точки которой можно коснуться конусом извне G.

Мы отправляемся от марковского процесса X в области G, обрывающегося в момент 1-го достижения T и имеющего инфинитезимальный оператор, являющийся для дважды непрерывно-дифференцируемых функций сужением оператора

$$L_1 u = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Существование такого процесса следует из [13] и [5].

Рассмотрим случайную величину $\tilde{\tau}_t$, определяемую соотношением:

$$\mathbf{P}\{\tilde{\tau} > t \mid X_u; 0 \leqslant u \leqslant t\} = \exp\left[-\int_0^t C(X_u)\,du\right], \tag{3}$$

где $C(x) \geqslant 0$. (Для того чтобы построить такую случайную величину, надо в качестве пространства элементарных событий Ω взять произведение пространства траекторий X_t на прямую (более подробно о конструкциях этого рода см. [5].) Легко показать, что $\mathbf{P}_x\{\tilde{\tau} < t\} = C(x)\cdot t + o(t)$, где $o(t)$ равномерно в любой области G_1 такой, что $G_1 \cup \Gamma_{G_1} \subset G$.

Обозначим $\pi(x, \gamma) = \mathbf{P}_x\{X_{\tilde{\tau}} \in \gamma\}$; $\gamma \in T$ и введем случайную величину ξ соотношением:

$$\xi = \begin{cases} 1, & \text{если } X_{\tilde{\tau}} \in T \\ 0, & \text{если } X_{\tilde{\tau}} \overline{\in} T. \end{cases}$$

Пусть $C(x)$ — дважды дифференцируемая в G_0 функция.

Теорема 1.1. *Пусть $f(s)$ — непрерывная на T функция. При сделанных в начале параграфа предположениях функция*

$$u(x) = \int_T f(s)\,\pi(x, ds) = M_x[\xi \cdot f(X_{\tilde{\tau}})]$$

удовлетворяет уравнению $L_1 u - Cu = 0$ в G и $u(x) \to f(x_0)$ при $x \to x_0 \in T$.

Функция $v(x) = M_x \int_0^{\tilde{\tau}} D(X_t)\,dt$ удовлетворяет уравнению $L_1 v - C(x)\cdot v = -D$ и $v \to 0$ при $x \to x_0 \in T$.

Утверждение теоремы 1.1 связано с найденным Е. Б. Дынкиным в [14] видом инфинитезимального оператора процесса более общего, чем рассматриваемый нами.

Доказательство этой теоремы с $C \equiv 0$ может быть проведено аналогично [7]. Остановимся несколько подробнее на случае $C \geqslant 0$. Обозначим $\widetilde{\mathbf{P}}(x, t, \Gamma) = \mathbf{P}_x\{X_t \in \Gamma,\ \widetilde{\tau} > t\}$.

Из (3) следует, что

$$\mathbf{P}(x, t, \Gamma) = \widetilde{\mathbf{P}}(x, t, \Gamma)[1 + C(x) \cdot t + o(t)], \tag{4}$$

где $o(t)$ равномерно по Γ и x. Используя соотношение (4), нетрудно получить, что $Au = Cu$, $Av = C \cdot v - D$, где A — инфинитезимальный оператор процесса. Далее, используя результаты для случая $C \equiv 0$, можно убедиться, что функции u и v принимают указанные в формулировке теоремы граничные значения. Используя теперь единственность решений уравнений $Au = C \cdot u$ и $Av = Gv - D$, принимающих заданные граничные значения (непрерывность функций u и v следует из доказанной Гирсановым в [15] сильной феллеровости процесса X), можно утверждать, что u и v дважды дифференцируемы, а $L_1 u = Cu$ и $L_1 v = Cv - D$.

§ 2. Притягивающая и отталкивающая граница

Множество Γ_0 назовем притягивающим, если для любой точки $x_0 \in \Gamma_0$ и любого $\eta > 0$

$$\lim_{x \to x_0} \mathbf{P}_x\{\Gamma^\tau \subset \Gamma_0 \cup \gamma_\eta\} = 1, \tag{5}$$

где $\gamma_\eta = \Gamma \cap \{x_2 < \eta\}$ *.

Точку $x_0 \in \Gamma_0$ назовем отталкивающей, если

$$\lim_{x \to x_0} \mathbf{P}_x\{\Gamma^\tau \subset \Gamma_0 \cup \gamma_\eta\} < 1$$

при некотором $\eta > 0$.

Множество Γ_0 назовем отталкивающим, если все его точки — отталкивающие.

Очевидно для того чтобы множество границы было притягивающим, необходимо и достаточно, чтобы оно не содержало отталкивающих точек. Из (1) следует, что любое непустое множество, принадлежащее Γ, является притягивающим. Однако не для любого притягивающего множества выполняется условие (1).

Пусть $f(x)$ — функция, непрерывная в $D \cup \Gamma \cup \Gamma_0$. Обозначим $u_\eta(x)$ — решение первой краевой задачи для уравнения (2), принимающее на Γ_η значения $f(x)$. Для дальнейшего нам часто будет полезна

Лемма 2.1. *При сделанных во введении предположениях относительно коэффициентов уравнения* (2) *ограниченное решение уравнения* (2), *принимающее граничные значения на* Γ, (*не обязательно единственное*), *суще-*

* Сформулируем более общее определение притягивающего множества границы. Пусть γ — любое множество границы. Обозначим $\mathfrak{U}_\eta(\gamma) = \{x : x \in \mathfrak{U}_\eta(x_0);\ x_0 \in \gamma\}$. Множество γ назовем притягивающим для процесса X в области D, если $\lim_{x \to x_0} \mathbf{P}_x\{\Gamma^\tau \subset \mathfrak{U}_\eta(\gamma)\} = 1$ для любого $\eta > 0$ и любой точки $x_0 \in \gamma$.

ствует и может быть получено как предел подпоследовательности семейства $\{u_\eta(x)\}$.

Заметим, что аналогичная лемма справедлива и для более общего уравнения $Lu - Cu = -D$, если предположить, что семейство $\{u_\eta\}$ равномерно ограничено.

Доказательство этой леммы опирается на априорные оценки производных решения уравнения (2) внутри области D, которые могут быть получены методом, указанным Бернштейном в [16]. Процесс построения решения с помощью семейства $\{u_\eta\}$ был впервые применен Винером к уравнению Лапласа, и мы будем называть его процессом Винера.

Введенные выше определения притягивающей границы тесно связаны со свойствами решений уравнения (2).

Лемма 2 2. *Для того чтобы множество* Γ_0 *было притягивающим, каждое из следующих двух условий является необходимым и достаточным:* (I) *Любое решение уравнения* (2) *в области* D, *построенное с помощью процесса Винера с функцией* $f_0(x)$ *такой, что* $f_0(x)|_{\Gamma_0} = 0$, *стремится к нулю при* $x \to \Gamma_0$. (II) *В некоторой окрестности* $\mathfrak{U}_{\Gamma_0}$ *существует дважды непрерывно-дифференцируемая функция* $V(x)$ *(барьер) такая, что* $V(x) > 0$ *при* $x \in D$; $LV \leqslant 0$ *и* $V(x) \to 0$ *при* $x \to \Gamma_0$.

Доказательство. Обозначим (III) утверждение о том, что отрезок Γ_0 — притягивающий. Докажем, что между утверждениями (I), (II) и (III) имеется следующая связь: (II) $\to$ (I) $\to$ (III) $\to$ (II).

1. Пусть $u_\eta(x)$ — решение уравнения (2) в D_η такое, что $u_\eta|_{\Gamma_\eta} = f_0(x)$. В силу равномерной непрерывности функции $f_0(x)$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|f_0(x)| < \varepsilon$ при $x_2 < \delta$. Не ограничивая общности, можно считать, что множество $D \cap \{x_2 < \delta\} \subset \mathfrak{U}_{\Gamma_0}$. Выберем число N_δ так, чтобы $V(x) \cdot N_\delta > |f(x)|$ при $x \in \mathfrak{U}_{\Gamma_0} \cap D_\delta$. (Это можно сделать, так как $V(x) > 0$ при $x \in D$.)

Обозначим $D'_\eta = D_\eta \cap \mathfrak{U}_{\Gamma_0}$; Γ'_η — границу D'_η.

Рассмотрим функцию $V_1(x) = N^\delta \cdot V(x) + \varepsilon \pm u_\eta(x)$.

Очевидно $LV_1 \leqslant 0$ и $V_1|_{\Gamma'_\eta} > 0$. Отсюда следует, что $|u_\eta| < N_\delta \cdot V(x) + \varepsilon$ (принцип максимума).

Переходя к пределу сначала при $\eta \to 0$, потом при $x \to \Gamma_0$, получим $\overline{\lim\limits_{x \to \Gamma_0}} |u_\eta(x)| < \varepsilon$ и, так как ε произвольно, из (II) следует (I).

2. Рассмотрим функцию

$$f_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_2}{\eta} & \text{при } x_2 < \eta \\ 1 & \text{при } x_2 \geqslant \eta. \end{cases}$$

При этом $u_\alpha(x) = M_x f_0(X_{\tau_\alpha})$, согласно теореме 1.1. Отсюда $u_\alpha(x) > \mathbf{P}_x\{X^2_{\tau_\alpha} > \eta\}$. Переходя к пределу при $\alpha \to 0$ и используя (I), получим, что

$$\lim_{x \to \Gamma_0} \mathbf{P}_x\{X^2_\tau > \eta\} = 0$$

при всех $\eta < 0$, что равносильно (III).

3. Рассмотрим функцию $f_0(x) = x_2$.

Имеем

$$u_\eta(x) = M_x f_0(X_{\tau_\eta}) = \int\limits_{\{X^2_{\tau_\eta} > \varepsilon\}} f_0(s)\,\mathbf{P}_x\{X_{\tau_\eta} \in ds\} + \int\limits_{\{X^2_{\tau_\eta} \leqslant \varepsilon\}} f_0(s)\,\mathbf{P}_x\{X_{\tau_\eta} \in ds\}.$$

Выберем подпоследовательность $\eta_n \to 0$, по которой существует предел

$$\lim_{n\to\infty} u_{\eta_n}(x) = u(x)$$

(лемма 2.1) и перейдем к пределу при $\eta_n \to 0$. Тогда получим $0 \leqslant u(x) \leqslant \max\limits_{D} f_0(x) \cdot \mathbf{P}_x\{X^2_\tau > \varepsilon\} + \varepsilon$.

Используя теперь (III) и переходя к пределу при $x \to \Gamma_0$, а затем при $\varepsilon \to 0$, получим, что $\lim\limits_{x\to\Gamma_0} u(x) = 0$. Функция $u(x)$ является, очевидно, барьером. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Для того, чтобы точка $x_0 \in \Gamma_0$ была отталкивающей, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих двух условий:*

(I) *Существует такое решение $u_0(x)$ уравнения* (2) *в D, построенное с помощью процесса Винера с функцией $f_0(x)$, обращающейся в нуль на Γ_0, что* $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}\, u_0(x) > 0$. (II) *Существует семейство функций $V_\eta(x)$, определенных в области $D_\eta \cap \mathfrak{U}_{x_0}$ с границей $\Gamma_\eta^{(x_0)}$, и постоянная $\varepsilon > 0$ такие, что:*

1) $LV_\eta \leqslant 0$ *в* $D_\eta \cap \mathfrak{U}_{x_0}$, (6′)

2) $V_\eta(x)\big|_{\Gamma_\eta^{(x_0)}} \cap \{x_2 < \varepsilon\} \geqslant 1$ при достаточно малых η, (6″)

3) $\lim\limits_{\overline{x\to x_0}} \lim\limits_{\eta\to 0} V_\eta(x) = 0$. (6‴)

Доказательство леммы проводится аналогично доказательству леммы 2.2.

Замечание. Условия 2) и 3) показывают, что функции $V_\eta(x)$ имеют характер пограничного слоя (для сравнения, см. [17]).

Прежде чем формулировать эффективные достаточные условия для притягивающей (отталкивающей) границы, приведем наводящие вероятностные соображения. Естественно ожидать, что для притягиваемости Γ_0 в процессе X достаточно, чтобы нуль был в каком-то смысле притягивающим для одномерного процесса X^2. Однако X^2 не есть, вообще говоря, марковский процесс. Нужно в каком-то смысле мажорировать его марковским, так как для одномерного марковского процесса имеются необходимые и достаточные условия притягиваемости (см., например, [18], а также [12]). Рассмотрим марковский процесс $\widetilde{X}^2$, для которого мгновенное математическое ожидание и мгновенная диффузия такие же, как для процесса X^2 на прямой $x_1 = x_1^0$. Условием того, чтобы нуль был притягивающим для процесса $\widetilde{X}^2$, будет интегрируемость в нуле функции

$$\exp\left[\int\limits_{x_2}^{x_2^0} \frac{b_2(x_1^0, z)}{a_{22}(x_1^0, z)}\, dz\right]$$

(см., например, [12]). Обозначим $\overline{B}_2(x_2)=\max\limits_{x_1\in\mathfrak{U}_{\Gamma_0}}\frac{b_2(x_1,x_2)}{a_{22}(x_1,x_2)}$; $\overline{W}(x_2)=\exp\left[\int\limits_{x_2}^{x_2^0}\overline{B}_2(z)dz\right]$.

В свете изложенных выше наводящих соображений становится понятной следующая

Теорема 2.1. *Для того чтобы отрезок* Γ_0 *был притягивающим, достаточно, чтобы функция* $\overline{W}(x_2)$ *была интегрируема в нуле.*

Для доказательства этой теоремы предположим, что $\overline{W}(x_2)$ интегрируема в нуле и рассмотрим функцию $V(x_2)=\int\limits_0^{x_2}\overline{W}(z)\,dz$. Нетрудно проверить, что эта функция является барьером, после чего применение леммы 2.2 дает утверждение теоремы.

Прежде чем формулировать достаточные условия для того, чтобы точка была отталкивающей, заметим, что здесь уже нельзя пренебречь и процессом в направлении оси x_1 (из-за возможности быстрого сноса в окрестность точки $(r_1,0)$ или $(r_2,0)$). Поэтому возникает дополнительное условие: мгновенные снос и диффузия в направлении оси x_1 не должны быть велики по сравнению с мгновенным сносом в направлении оси x_2. Обозначим $\underline{B}_2^{(x_0)}(x_2)=$

$=\min\limits_{x_1\in\mathfrak{U}_{x_0}}\frac{b_2(x_1,x_2)}{a_{22}(x_1,x_2)}$, $\underline{W}^{(x_0)}(x_2)=\exp\left[\int\limits_{x_2}^{x_2^0}\underline{B}_2^{(x_0)}(z)\,dz\right]$.

Теорема 2.2. *Для того чтобы точка* $x_0\in\Gamma_0$ *была отталкивающей, достаточно, чтобы*: 1) *функция* $\underline{W}^{(x_0)}(x_2)$ *была неинтегрируема в нуле*, 2) *функции* $\left|\frac{a_{11}}{b_2}\right|$ *и* $\left|\frac{b_1}{b_2}\right|$ *были ограничены в* $\mathfrak{U}_{x_0}$.

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы 2.2. Рассмотрим семейство функций

$$V_\eta(x_1,x_2)=k\left[(x_1-x_1^0)^2-cx_2+\frac{\int\limits_{x_2}^{x_2^0}\underline{W}^{(x_0)}(z)\,dz}{\int\limits_{\eta}^{x_2^0}\underline{W}^{(x_0)}(z)\,dz}\right].$$

Докажем, что при соответствующем выборе $k>0$ и $c>0$ семейство $\{V_\eta\}$ удовлетворяет условиям (6).

В самом деле, условие (6‴) выполняется всегда, условие (6″) выполняется при достаточно большом k. Заметим теперь, что из условий теоремы следует, что $b_2(x)>0$ в $\mathfrak{U}_{x_0}\cap D$.

Имеем

$$LV_\eta=2a_{11}(x)+2b_1(x)(x_1-x_1^0)-b_2(x)\cdot c+$$

$$+\underline{W}^{(x_0)}(x_2)\left(\int\limits_{\eta}^{x_2^0}\underline{W}^{(x_0)}(z)\,dz\right)^{-1}\cdot[a_{22}(x)\cdot\underline{B}_2^{(x_0)}(x_2)-b_2(x)]\leqslant$$

$$\leqslant b_2(x)\left[\frac{2a_{11}(x)}{b_2(x)}+\frac{2b_1(x)(x_1-x_1^0)}{b_2(x)}-c\right].$$

Отсюда ясно, что $LV_\eta \leqslant 0$ при

$$c=\sup_{x\in\mathfrak{U}_{x_0}}\left\{2\left|\frac{a_{11}}{b_1}\right|+2|x_1-x_1^0|\left|\frac{b_1}{b_2}\right|\right\}$$

и (6′) выполняется. Применяя теперь лемму 2.3, мы получим, что точка x_0 — отталкивающая.

§ 3. Регулярность граничных точек и различные постановки первой краевой задачи

Граничную точку x_0 назовем регулярной для процесса X, если для любой окрестности $\mathfrak{U}_{x_0}$ точки x_0

$$\lim_{x\to x_0}\mathbf{P}_x\{\Gamma^\tau\subset\mathfrak{U}_{x_0}\}=1. \tag{7}$$

Из (1) следует, что все точки $x_0\in\Gamma$ — регулярны. Ясно, с другой стороны, что отталкивающая точка не может быть регулярной.

Замечание. Нетрудно показать, используя теорему 1.1, что регулярность каждой точки границы является необходимым и достаточным условием для того, чтобы существовало единственное решение уравнения (2), принимающее заданные значения на *всей* границе.

Справедлива следующая

Лемма 3.1. *Точка $x_0\in\Gamma_0$ регулярна для процесса X, если найдется в $\mathfrak{U}_{x_0}$ функция $V(x)$ (барьер), непрерывная в $(D\cup\Gamma_0)\cap\mathfrak{U}_{x_0}$, равная нулю в точке x_0 и положительная в остальных точках $\mathfrak{U}_{x_0}$, для которой выполняется неравенство: $LV\leqslant 0$ в $D\cap\mathfrak{U}_{x_0}$.*

Мы не будем приводить доказательства этой леммы, так как сделанное выше замечание сводит ее к известной тесреме из дифференциальных уравнений (см., например, [19]).

Для того чтобы выяснить вероятностный смысл условий приводимой ниже теоремы, приведем следующие эвристические соображения. Регулярная для процесса X точка регулярна и для процесса $\widetilde{X}$, полученного из X с помощью случайной замены времени (см. [20]). Но при случайной замене времени, как показано в [20], оператор L умножается на некоторую функцию. Поэтому, разделив оператор L на функцию $a_{11}+|b_1|$, мы получим, что коэффициенты сноса и диффузии в направлении оси x_1 для процесса $\widetilde{X}$ ограничены. Если при этих условиях для процесса $\widetilde{X}^2$ время достижения нуля стремится к нулю при $\widetilde{X}_0^2\to 0$ по вероятности, то естественно ожидать, что условие (7) будет выполнено. Для нестрогого нахождения условий достижимости нуля в процессе $\widetilde{X}^2$ воспользуемся приемом, который уже применялся в § 2. Рассмотрим марковский процесс $\overline{X}^2$, для которого коэффициенты сноса и диффузии такие же, как и у процесса $\widetilde{X}^2$ на прямой $x_1=x_1^0$. Необходимые и достаточные условия достижимости нуля марковским процессом были найдены Феллером в [18]. А именно, для достижимости нуля процессом $\overline{X}^2$ необходимо и достаточно, чтобы функция

$$\exp\left[\int_{x_2}^{x_2^1}\frac{b_2(x_1^0, z)}{a_{22}(x_1^0, z)}\,dz\right]\cdot\int_{x_2}^{x_2^1}\exp\left[-\int_{z}^{x_2^1}\frac{b_2(x_1^0, u)}{a_{22}(x_1^0, u)}\,du\right]\cdot\frac{[a_{11}(x_1^0, z)+|b_1(x_1^0, z)|]}{a_{22}(x_1^0, z)}\,dz$$

была интегрируема в нуле.

Так как достижение нуля процессом $\tilde{X}^2$ происходит не обязательно по прямой $x_1 = x_1^0$, то естественно ожидать, что приведенное условие достижимости должно выполняться равномерно. Мы потребуем выполнения немного более сильного условия. Введем обозначения:

$$\underline{A}_2^{(x_0)}(y) = \min_{x_1\in\mathfrak{U}_{x_0}}\frac{a_{22}(x_1, y)}{a_{11}(x_1, y)+|b_1(x_1, y)|};$$

$$\overline{B}_2^{(x_0)}(y) = \max_{x_1\in\mathfrak{U}_{x_0}}\frac{b_2(x_1, y)}{a_{22}(x_1, y)};\quad \overline{W}^{(x_0)}(y) = \exp\left\{\int_{y}^{x_2^1}\overline{B}_2^{(x_0)}(z)\,dz\right\};$$

$$\overline{Z}^{(x_0)}(y) = \overline{W}^{(x_0)}(y)\cdot\int_{y}^{x_2^1}[\overline{W}^{(x_0)}(z)\cdot\underline{A}_2^{(x_0)}(z)]^{-1}\,dz.$$

Теорема 3.1. *Для того чтобы точка $x_0\in\Gamma_0$ была регулярной для процесса X, достаточно, чтобы функция $\overline{Z}^{(x_0)}(y)$ была интегрируема в нуле. В случае выполнения этого условия для всех точек $x_0\in\Gamma_0$ существует единственное решение уравнения* (2), *принимающее заданные значения на всей границе* $\Gamma\cup\Gamma_0$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$V(x_1, x_2) = \int_0^{x_2}\overline{Z}^{(x_0)}(u)\,du + \varepsilon(x_1 - x_1^0)^2.$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям леммы 3.1 при подходящем выборе $\varepsilon > 0$. В самом деле

$$LV = -\frac{a_{22}(x_1, x_2)}{\underline{A}_2^{(x_0)}(x_2)} - \overline{Z}^{(x_0)}(x_2)[a_{22}(x)\,\overline{B}_2^{(x_0)}(x_2) - b_2(x)] +$$

$$+ 2b_1(x)\cdot\varepsilon(x_1 - x_1^0)^2 + 2\varepsilon a_{11}(x) \leqslant$$

$$\leqslant -[a_{11}(x) + |b_1(x)|] + 2b_1(x)\,\varepsilon(x_1 - x_1^0) + 2\varepsilon a_{11}(x) \leqslant 0$$

при $\varepsilon = \min\left\{\frac{1}{2};\ \frac{1}{\rho}\right\}$ (ρ — диаметр окрестности $\mathfrak{U}_{x_0}$). Выполнение остальных условий леммы 3.1 очевидно. Первое утверждение теоремы доказано. Второе утверждение следует теперь из сделанного в начале параграфа замечания.

Множество Γ_0 назовем недостижимым, если

$$\mathbf{P}_x\{\Gamma^\tau \cap \Gamma_0 \neq 0\} = 0 \tag{8}$$

для некоторой точки $x \in D^*$.

Лемма 3.2. *Для того чтобы отрезок Γ_0 был недостижимым, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий*: (I) *Существует единственное ограниченное в D решение уравнения* (2), *принимающее граничные значения на Γ.* (II) *Существует семейство функций $\{V_\eta\}$ в областях D_η, обладающее следующими свойствами*:

1) $LV_\eta \leqslant 0$ *в* D_η,

2) $V_\eta|_{\Gamma_\eta \cap \{x_2 = \eta\}} \geqslant k > 0$,

3) $V_\eta(x) \to 0$ *при* $\eta \to 0$ *для любой точки* $x \in D$.

Доказательство этой леммы проводится аналогично доказательству леммы 2.2.

Часто бывает полезна следующая лемма, дающая более легко проверяемые условия недостижимости.

Лемма 3.3. *Для недостижимости отрезка Γ_0 процессом X, достаточно, чтобы существовала функция $U(x)$ со свойствами*:

1) $U(x) > 0$ *в* D, 2) $LU(x) \leqslant 0$ *в* D;

3) $U(x) \to +\infty$ *при* $x \to \Gamma_0$ *равномерно по* x *в области* D.

Доказательство этой леммы имеется, по существу, в [1].

Обозначим

$$\overline{A}_2(x_2) = \max_{x_1 \in \mathfrak{U}_{\Gamma_0}} \frac{a_{22}(x_1, x_2)}{a_{11}(x_1, x_2) + |b_1(x_1, x_2)|};$$

$$\underline{B}_2(x_2) = \min_{x_1 \in \mathfrak{U}_{\Gamma_0}} \frac{b_2(x_1, x_2)}{a_{22}(x_1, x_2)};\ \underline{W}(y) = \exp\left\{\int_y^{x_2^1} \underline{B}_2(z)\, dz\right\},$$

$$\underline{Z}(y) = \underline{W}(y) \int_y^{x_2^*} \underline{W}^{-1}(z)\, \overline{A}_2^{-1}(z)\, dz.$$

Эвристические соображения, аналогичные приведенным выше, приводят к тому, что нуль для процесса $\overline{X}^2$ недостижим, если функция $\underline{Z}(y)$ не интегрируема в нуле. При этом может случиться, однако, что с положительной вероятностью процесс X терпит разрыв второго рода при $t = \tau$ и соотношение (8) не выполняется. Для того чтобы исключить эту возможность, нужно сделать некоторые дополнительные предположения относительно коэффициентов $a_{11}(x)$ и $b_1(x)$.

Мы скажем, что коэффициенты удовлетворяют условию (H), если существуют замкнутые множества Γ_0^1 и Γ_0^2 такие, что $\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2 = \Gamma_0$, причем $a_{11}(x) > k > 0$ и $b_1(x)$ ограничена при $x \in \mathfrak{U}_{\Gamma_0'}$; $b_1(x)$ имеет постоянный знак при $x \in \mathfrak{U}_{\Gamma_0^2}$.

* Нетрудно показать, что тогда и для любой точки $x \in D$ будет выполнено соотношение (8). В приложении доказано, что в этом случае Γ^τ с вероятностью 1 состоит из одной точки, т. е. случайная величина X_τ определена.

Теорема 3.2. *Если функция* $\underline{Z}(y)$ *не интегрируема в нуле, а коэффициенты удовлетворяют условию* (H), *то* Γ_0 *— недостижимая граница.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $U(x) = \int_{x_2}^{x_2'} \underline{Z}(u)\,du - (x_1 - \alpha)^n + C$ и докажем, что она удовлетворяет условиям леммы 3.3. Действительно, легко проверить, что

$$LU(x) \leqslant a_{11}(x) + |b_1(x)| - (x_1 - \alpha)^{n-2} n[(n-1)a_{11}(x) + (x_1 - \alpha) b_1(x)].$$

При выполнении условия (H) за счет выбора n и α можно добиться того, чтобы функция $LU \leqslant 0$. В самом деле, пусть для определенности $b_1(x) < 0$ в $\mathfrak{U}_{\Gamma_0'}$. Выберем тогда α так, чтобы $x_1 - \alpha < -1$ в D, а в качестве n возьмем четное положительное число такое, чтобы $(n-1)\inf\limits_{x \in \mathfrak{U}_{\Gamma_0'}} a_{11}(x) > (|x_1 - \alpha| + 1)|b_1(x)|$ в $\mathfrak{U}_{\Gamma_0'}$. Далее выбираем C так, чтобы $U(x) > 0$ в $\mathfrak{U}_{\Gamma_0'}$. Такой выбор α, n и C обеспечивает выполнение всех условий леммы 3.3. Теорема доказана.

§ 4. Поведение процесса в окрестности притягивающей недостижимой границы

Пусть отрезок Γ_0 — притягивающий, но недостижимый. Для того чтобы такой случай имел место, достаточно, чтобы функция $\overline{W}(y)$ была интегрируема в нуле, а функция $\underline{Z}(y)$ не интегрируема и выполнялось условие (H).

Из (5) и (8) ясно, что в этом случае $\mathbf{P}_x\{\Gamma^\tau \subset \gamma_\eta\} \to 1$ при $x \to \Gamma_0$ для любого $\gamma_\eta > 0$. В терминах дифференциальных уравнений этот факт означает, что предельное поведение решения $u(x)$ уравнения (2) при $x \to \Gamma_0$ зависит лишь от значений граничной функции в точках $(r_1, 0)$ и $(r_2, 0)$ *.

В случае регулярного поведения коэффициентов a_{11} и b_1 в окрестности Γ_0 можно в этом случае найти пределы вероятностей $\mathbf{P}_x\{X_\tau \in \mathfrak{U}(r_1, 0)\}$ и $\mathbf{P}_x\{X_\tau \in \mathfrak{U}(r_2, 0)\}$ при $x \to x_0 \in \Gamma_0$.

Предположим, что коэффициенты $a_{11}(x)$ и $b_1(x)$ непрерывны в замкнутой области $D \cup \Gamma \cup \Gamma_0$ и $a_{11} > 0$ в этой замкнутой области. Обозначим $X^0 = \{X_t^0, \tau_0, M_t^0, \mathbf{P}_x^0\}$ — процесс на отрезке $[r_1, r_2]$ с обрыванием в момент τ_0 достижения точки r_1 или r_2, расширение инфинитезимального оператора которого для дважды непрерывно-дифференцируемых функций совпадает с

$$L_0(u) = a_{11}(x_1, 0)\frac{d^2u}{dx_1^2} + b_1(x_1\,0)\frac{du}{dx_1}.$$

Теорема 4.1. *Пусть отрезок* Γ_0 *— недостижимый притягивающий, а* $f_0(x)$ *— непрерывная функция на* Γ. *При сделанных предположениях относительно коэффициентов* a_{11} *и* b_1 *функция* $M_x f_0(X_\tau) \to M_{x_0}^0 f_0(X_{\tau_0}^0, 0)$ *при* $x \to x_0 \in \Gamma_0$, *причем стремление к пределу равномерно по* x_0.

* Впервые эта возможность для частного уравнения, рассматривавшегося в [1], была отмечена А. М. Ильиным.

В терминах дифференциальных уравнений это значит, что функция $u(x)$ — решение (единственное в силу недостижимости Γ_0) уравнения (2), принимающее значения $f_0(x_1, x_2)$ на Γ, имеет в этом случае такое предельное поведение:

$$\lim_{x \to (x_1^0, 0)} u(x) = u_0(x_1^0), \tag{9}$$

где $u_0(x_1)$ есть решение уравнения $L_0 u_0 = 0$, принимающее значения $f_0(r_1, 0)$ и $f_0(r_2, 0)$ на концах Γ_0, причем стремление к пределу в (9) равномерно по x_1^0.

Доказательство. 1) Для любого $\gamma > 0$ найдется такое $\rho > 0$, что при $x_2 < \rho$ функция

$$|Lu_0(x)| = \left| a_{11}(x) \frac{d^2 u_0}{dx_1^2} + b_1(x) \frac{du_0}{dx_1} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| a_{11}(x, 0) \frac{d^2 u_0}{dx_1^2} + b_1(x_1, 0) \frac{du_0}{dx_1} \right| + \gamma = \gamma.$$

2) Рассмотрим функцию

$$V_1(x_1) = 2 \int_{r_1}^{x_2} dz e^{\int_z^{r_2} \frac{b_1(\xi,0)}{a_{11}(\xi,0)} d\xi} \int_z^{r_2} e^{-\int_z^{r_2} \frac{b_1(u,0)}{a_{11}(u,0)} du} \frac{d\xi}{a_{11}(\xi, 0)}.$$

Легко проверить, что $LV_1 < -1$ в достаточно малой окрестности Γ_0. Не нарушая общности, можно считать, что $LV_1 < -1$ при $x_2 < \rho$.

3) В силу недостижимости Γ_0 функция $u(x)$ не зависит от того, каким способом непрерывно продолжать внутрь области D заданную на Γ функцию $f_0(x)$ при построении семейства $u_\eta(x)$. Мы определим $f(x)$ в области D при фиксированном x_2 как решение уравнения $L_0 u = 0$, принимающее значения $f_0(x)$ для $x \in \Gamma$.

Из-за непрерывности $f_0(x)$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ (выберем $\delta < \rho$) такое, что

$$|f_0(x_1^{(i)}, x_2) - f_0(r_i, 0)| < \varepsilon \text{ при } x_2 < \delta \ (i = 1, 2).$$

(Мы предполагаем, что δ выбрано так, чтобы прямые $x_2 = x_2^0$ при $x_2^0 < \delta$ пересекали Γ только в двух точках $(x_1^{(1)}, x_2^0)$ и $(x_1^{(2)}, x_2^0)$. Тогда и внутри области имеем $|u_\eta(x_1, \eta_1) - u_0(x_1)| < \varepsilon$ при $\eta < \delta$ (принцип максимума).)

4) Так как отрезок Γ_0 притягивающий, то на основании леммы 2.2 найдется функция $V_2(x)$ со свойствами:

$$LV_2 \leqslant 0;\ V_2 \to 0 \text{ при } x \to \Gamma_0;\ V_2 > 0 \text{ при } x \in D \cup \Gamma.$$

5) Рассмотрим функцию

$$V(x) = \gamma V_1(x) + N_\delta V_2(x) + \varepsilon \pm [u_\eta(x) - u_0(x)]$$

в области $D_\eta \cap \{x_2 < \rho\}$. Число N_δ выбрано так, чтобы

$$N_\delta V_2(x) > 2 \max |f(x)| \text{ при } x_2 > \delta.$$

Легко проверить, что функция $V(x) > 0$ на границе области и $LV < 0$ внутри области, откуда следует, что $V(x) > 0$ всюду в $D_\tau \cap \{x_2 < \rho\}$. Переходя теперь к пределу сначала при $\tau_1 \to 0$, а затем при $x_2 \to 0$, получим:

$$\lim_{x_2 \to 0} | u(x) - u_0(x_1) | \leqslant \varepsilon + \gamma V_1(r).$$

Теорема доказана, так как ε и γ произвольны.

§ 5. Случайный процесс, связанный с оператором

$$L^0(u) = x_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + (1 - x_1^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - 2x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}.$$

Условие (H) может не выполняться для отрезка Γ_0, но выполняться для любого отрезка, содержащегося в $(r_1, r_2]$ или $[r_1, r_2)$. Тогда теорему 3.2 можно применять к областям, граница которых содержит отрезок оси абсцисс, содержащийся в одном из этих полузамкнутых интервалов. Достижимость же отрезка Γ_0 и постановка первой краевой задачи для области D в этом случае может зависеть от вида кривой Γ в окрестности точек $(r_1, 0)$ и $(r_2, 0)$. Интересным является тот факт, что в этом случае может возникнуть новая постановка первой краевой задачи для уравнения (2). С вероятностной точки зрения это соответствует разрыву второго рода у траектории процесса при $t = \tau$ с положительной вероятностью.

Рассмотрим, например, процесс X, связанный с оператором L^0, в области D, лежащей в полуплоскости $x_2 > 0$, граница которой состоит из отрезка $[-1, +1] = \Gamma_0$ действительной оси и кусочно-гладкой кривой Γ, каждой точки которой можно извне коснуться конусом, причем Γ не пересекает прямые $x_1 = \pm 1$. Из теоремы 2.1 следует, что отрезок Γ_0 является притягивающим (в этом случае $\overline{W}(y) = 1$).

В любой области $D' \subset D$ такой, что ее граница содержит отрезок Γ_0' оси абсцисс, содержащийся в $[-1, +1]$ или $(-1, +1]$ условие (H), как нетрудно проверить, выполняется. Функция же $\underline{Z}(y) = \int_y^{x_2'} \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{y} - \frac{1}{x_2'}$ не интегрируема в нуле.

Применение теоремы 3.2 дает в этом случае, что $\mathbf{P}_x\{\Gamma^{\tau'} \cap \Gamma_0' \neq 0\} = 0$ (τ' — время до выхода из D'),

Перейдем теперь к изучению процесса X в области D. Рассмотрим события $A = \{\Gamma^\tau$ состоит из одной точки $x_0 \in \Gamma\}$; $C = \{\Gamma^\tau \cap \Gamma \neq 0\}$.

Из леммы дополнения следует, что

$$\mathbf{P}_x\{C \cap \overline{A}\} = 0 \tag{10}$$

Обозначим

$$B = \{\Gamma^\tau = \Gamma_0\}.$$

Теорема 5.1. *Если в окрестности точек* $(-1, 0)$ *и* $(+1, 0)$ *на кривой* Γ *выполняется соотношение*

$$x_2^2 = o(1 - x_1^2), \tag{11}$$

то отрезок Γ_0 *— недостижим; если же в окрестности этих точек на кривой* Γ

$$x_2 \geqslant -\frac{c^2}{\ln(1-x_1^2)} \tag{12}$$

при некотором $c \neq 0$, *то*

1) $\mathbf{P}_x\{A \cup B\} = 1$; 2) $\mathbf{P}_x\{\Gamma^\tau = \Gamma_0\} \to 1$ *при* $x \to x_0 \in (-1, +1)$.

Из первого утверждения теоремы следует, что $\mathbf{P}_x\{\Gamma^\tau \subset \gamma_\eta\} \to 1$ при $x \to x_0 \in \Gamma_0$ для любого $\eta > 0$ (см. начало § 4), если (11) выполняется. Второе утверждение означает, что процесс X терпит разрыв второго рода при $t = \tau$ с положительной вероятностью, если выполняется условие (12).

Доказательство. 1) Пусть $x_2^2 = o(1-x_1^2)$ на кривой Γ в окрестности точек $(1,0)$ и $(-1,0)$. Рассмотрим функцию

$$U(x_1, x_2) = \ln\frac{1-x_1^2}{x_2^2} + C.$$

За счет подходящего выбора постоянной C легко добиться того, чтобы $U > 0$ в D. Нетрудно проверить, что $L^0 U = 0$. Из (11) следует, что $U \to +\infty$ равномерно в D при $y \to 0$. Следовательно, функция $U(x)$ удовлетворяет условиям леммы 3.3 и первая часть теоремы доказана.

2) Для простоты ограничимся случаем $x_2 = -\frac{c^2}{\ln(1-x_1^2)}$ в некоторой окрестности точек $(1,0)$ и $(-1,0)$ на кривой Γ. (Доказательство в случае, когда $x_2 \geqslant -\frac{c^2}{\ln(1-x_1^2)}$, отличается несущественно.)

Рассмотрим функцию $V(x) = \frac{x_2 \ln(1-x_1^2)}{c^2} + \frac{2x_2 \ln x_2}{c^2} + 1$. Нетрудно проверить, что $\lim\limits_{x_2 \to 0} V|_\Gamma = 0$; $\lim\limits_{\substack{x_2 \to 0 \\ |x_1| < k < 1}} V = 1$ и $L^0 V = 0$. Пусть $u_1(x)$ есть решение уравнения

$$L^0(u) = 0, \tag{13}$$

принимающее значения $V(x)$ на Γ и стремящееся к нулю при $x_2 \to 0$. (Такое решение существует в силу леммы 2.2.) Ясно, что функция $V_1(x) = V(x) - u_1(x)$ удовлетворяет уравнению (13) и

$$V_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in \Gamma \\ 1 & \text{при } x \in (-1, +1). \end{cases} \tag{14}$$

Обозначим $\mathfrak{U}_\rho(x')$ множество $\{(x_1 - x_1')^2 + x_2^2 \leqslant \rho^2;\ x_2 \geqslant 0\}$ и пусть τ_ρ — время достижения границы области $F = D \setminus \mathfrak{U}_\rho(x')$ процессом X. Докажем, что $\mathbf{P}_x\{X_{\tau_\rho} \in \mathfrak{U}_\rho(x')\} \to 1$ при $x \to x^0 = (x_1^0, 0)$ равномерно относительно ρ и относительно $x_1^0 \in [r', r'']$, где $[r', r''] \subset (-1, +1)$.

Нетрудно видеть, что $\mathbf{P}_x\{X_{\tau_\rho} \in \mathfrak{U}_\rho(x')\} = \lim\limits_{\eta \to 0} u_\eta(x)$, где $u_\eta(x)$ есть решение уравнения (13) в области $F \cap \{x_2 > \eta\}$, удовлетворяющее условиям $u_\eta(x) = 1$ при $x \in \mathfrak{U}_\rho(x')$ и $u_\eta(x) = 0$ на остальной части границы.

Докажем, что

$$\lim_{\eta\to 0} u_\eta(x) = \lim_{\eta\to 0} u'_\eta(x), \tag{15}$$

где $u'_\eta(x)$ есть решение уравнения (13) в области $F \cap \{x_2 > \eta\}$, принимающее граничные значения $u'_\eta(x) = 1$ при $x \in \mathfrak{U}_\rho(x') \cup \{x = \eta\}$ и $u'_\eta(x) = 0$ на остальной части границы.

Рассмотрим разность $v_\eta(x) = u^1_\eta(x) - u_\eta(x)$. Ясно, что $L^0 v_\eta = 0$ внутри области $F \cap \{x_2 > \eta\}$, $v_\eta = 0$ при $x \in \Gamma \cup \mathfrak{U}_\rho(\lambda)$ и $v_\eta = 1$ на прямой $x_2 = \eta$. Функция $v(x) = \lim\limits_{\eta\to 0} v_\eta(x)$ в области F также удовлетворяет уравнению (13).

Рассмотрим теперь функцию $v(x)$ в областях $F_1 = F \cap \{x_1 < x'_1\}$ и $F_2 = F \cap \{x_1 > x'_1\}$. В каждой из этих областей выполняется условие (H), поэтому для частей процесса X в областях F_1 и F_2 нижний участок границы является притягивающим, но недостижимым. Отсюда сразу следует, что $\lim\limits_{x_2\to 0} v(x) = 0$ и, в силу принципа максимума, $v(x) \equiv 0$. Соотношение (15) доказано.

Ясно, что на границе области $F \cap \{x_2 > \eta\}$ имеем $V_1(x) < u'_\eta(x)$. Следовательно, и внутри области соблюдается это неравенство. Переходя к пределу при $\eta \to 0$ и используя (15), получим:

$$\mathbf{P}_x\{X_{\tau_\rho} \in \mathfrak{U}_\rho(x')\} \geqslant V_1(x).$$

Применяя теперь (14), получим, что

$$\mathbf{P}_x\{X_{\tau_\rho} \in \mathfrak{U}_\rho(x')\} \to 1 \tag{16}$$

при $x \to x^0$ равномерно относительно ρ и x^0 внутри $[r', r'']$.

3) Пусть теперь $x', x^2, \ldots, x^n, \ldots$ — последовательность всех точек интервала $(-1, +1)$, имеющих рациональную абсциссу. Рассмотрим последовательность $\{y_n\} = x^1;\ x^1;\ x^2;\ x^1; x^2; x^3;\ x^1; x^2; x^3; x^4; \ldots$, составленную из «расширяющихся циклов».

На основании доказанного можно выбрать последовательность полуокрестностей точек y_n радиусов ρ_n так, чтобы

$$\mathbf{P}_{y'_n}\{X_{\tau_{\rho_{n+1}}} \in \mathfrak{U}_{\rho_{n+1}}(y_{n+1})\} > 1 - \frac{1}{n^2};\ (y'_n \in \mathfrak{U}_{\rho_n}(y_n)).$$

Отсюда ясно, что вероятность события, состоящего в том, что все точки $x^i \in \Gamma^\tau$, будет больше, чем $\prod\limits_{n=k}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ для начальной точки $x \in \mathfrak{U}_{\rho_k}(y_k)$.

Используя это обстоятельство, получим:

$$\mathbf{P}_x\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x^i \in \Gamma^\tau\}\right) \geqslant \mathbf{P}_x\{X_{\tau_{\rho_k}} \in \mathfrak{U}_{\rho_k}(y_k)\} \prod_{n=k}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \tag{17}$$

при любом k. На основании (16) при $x \to x_0$ и при любом k равномерно для всех $x^0 \in [r', r'']$ вероятность $\mathbf{P}_x\{X_{\tau_{\rho_k}} \in \mathfrak{U}_{\rho_k}(y_k)\} \to 1$.

Таким образом получаем, что $\mathbf{P}_x\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{x^i \in \Gamma^\tau\}\right) \to 1$ при $x \to x_0 \in [r', r'']$ равномерно по x^0. Отсюда, так как множество $\{x^i\}$ всюду плотно в $[-1, +1]$, следует:

$$\mathbf{P}_x\{\Gamma^\tau \supseteq \Gamma_0\} \to 1 \tag{18}$$

при $x \to x_0^0 \in (-1, +1)$, причем сходимость равномерна по x^0 при $x^0 \in [r', r''] \subset \subset (-1, +1)$.

4) Введем обозначения: $E = \{\Gamma^\tau \cap (-1, +1) \neq 0\}$, $\Gamma_n = \Gamma_0 \cap \left\{ |x_1| \leqslant 1 - \frac{1}{n} \right\}$; $E_n = \{\Gamma^\tau \cap \Gamma_n\}$; $G = \{\Gamma_0 \setminus \Gamma^\tau \neq 0\}$.

Пусть $x^0 = (x_1^0, 0) \in \Gamma_n$; обозначим $\mathfrak{U}_n^k = \{x : (x_1 - x_1^0)^2 + x_2^2 < \frac{1}{k}\,;\ x_2 > x\}$ — полуокрестность отрезка Γ_n, γ_n^k — часть границы $\mathfrak{U}_n^k$, лежащую в полуплоскости $x_2 > 0$, а τ_n^k — время до достижения траекторий процесса границы области $D \setminus \mathfrak{U}_n^k$.

Очевидно $E_n \cap G \subset \{X_{\tau_n^k} \in \gamma_n^k\} \cap F$. Поэтому

$$\mathbf{P}_x(E_n \cap G\} \leqslant \int\limits_{y \in \gamma_n^k} \mathbf{P}_x\{X_{\tau_n^k} \in dy\}\, \mathbf{P}_y\{\hat{G}\} \leqslant \sup_{y \in \gamma_n^k} \mathbf{P}_y\{\hat{G}\}.$$

Применяя теперь (18), получим:

$$\mathbf{P}_x\{E_n \cap G\} = 0. \tag{19}$$

Далее имеем: $E \cap \bar{B} \subset \{E \cap C\} \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{E_n \cap G\}$. Так как $E \subset \bar{A}$, то из (10) следует, что $\mathbf{P}_x\{E \cap G\} = 0$. Используя (19), получим

$$\mathbf{P}_x\{E \cap \bar{B}\} = 0. \tag{20}$$

Событие $\bar{A} \setminus E \subset \{C \cap \bar{A}\} \cup \{\Gamma^\tau \subset (1, 0) \cup (-1, 0)\}$. Нетрудно показать, что $\mathbf{P}_x\{\Gamma^\tau \subset (1, 0) \cup (-1, 0)\} = 0$. Следовательно, $\mathbf{P}_x\{\bar{A} \setminus E\} = 0$. Применяя теперь (20), получим $\mathbf{P}[\bar{A} \cap \bar{B}] = 0$, что и требовалось доказать.

Замечание. Хотя теорема 5.1 формулировалась для процесса, связанного с конкретным видом оператора L^0, из способа доказательства ее видно, что существенны лишь некоторые общие свойства этого оператора.

Из доказанной теоремы, используя теорему 1.1, легко получить различные постановки первой краевой задачи и свойства решений уравнений (13).

Теорема 5.1′. *Если выполняется условие* (11), *то существует единственное ограниченное в* D *решение уравнения* (13), *принимающее заданные значения на* Γ. *Если же выполняется условие* (12), *то*:

1) *Для того чтобы существовало непрерывное в замкнутой области решение уравнения* (13), *необходимо и достаточно, чтобы* $f(1, 0) = f(-1, 0)$.

2) *Существует единственное непрерывное в области* $\widetilde{D} = D \cup \Gamma \cup (-1, +1)$ *ограниченное решение уравнения* (13), *принимающее заданные значения на* Γ *и обращающееся в заданную постоянную при* $x \to x_0 \in (-1, +1)$.

3) *Не существует других непрерывных в* $\widetilde{D}$ *ограниченных решений уравнения* (13).

§ 6. Примеры

1. Пусть коэффициенты a_{11} и b_1 непрерывны в замкнутой области, причем $a_{11}(x_1, 0) > 0$, а коэффициенты a_{22} и b_2 в некоторой окрестности Γ_0 не зависят от x_1 и $b_2 \neq 0$ в некоторой окрестности Γ_0. Тогда из теорем 2.1 и 2.2 получим следующий результат: если функция $W(y) = \exp\left\{\int_y^{x_2'} \frac{b_2(u)}{a_{22}(u)}\, du\right\}$ интегрируема в нуле, то Γ_0 притягивает, если $W(y)$ не интегрируема в нуле, то Γ_0 отталкивает.

Откажемся теперь от ограничения $b_2 \neq 0$ в $\mathfrak{U}_{\Gamma_0}$. Теоремы 3.1 и 3.2 дают такой результат.

Если функция $Z(y) = W(y) \int_x^{x_2'} [W(s)\, a_{22}(s)]^{-1}\, ds$ интегрируема в нуле, то все точки отрезка Γ_0 регулярны для процесса X, если $Z(y)$ не интегрируема в нуле, то Γ_0 — недостижимый отрезок границы. Соответствующие результаты для дифференциальных уравнений сведем в таблицу.

1) $W(y)$ не интегрируема в нуле	Существует единственное ограниченное решение уравнения (2), принимающее на Γ заданные значения. Предельное поведение этого решения при $x \to x_0 \in (r_1, r_2)$ определяется граничной функцией на всей границе Γ.
2) $W(y)$ интегрируема в нуле	а) Существует единственное ограниченное решение $u(x)$ уравнения (2), принимающее на Γ заданные значения, причем $\lim_{x \to \left(x_1^0,\, 0\right)} u(x) = f(r_1, 0) + [f(r_2, 0) - f(r_1, 0)] \dfrac{\int_{r_1}^{x_1^0} \exp\left\{\int_z^{r_2} \frac{b_1(u,0)}{a_{11}(u,0)}\, du\right\} dz}{\int_{r_1}^{r_2} \exp\left\{\int_z^{r_2} \frac{b_1(u,0)}{a_{11}(u,0)}\, du\right\} dz}$.
а) $Z(y)$ не интегрируема в нуле	
б) $Z(y)$ интегрируема в нуле	б) Существует единственное решение уравнения (2), принимающее на всей границе $\Gamma \cup \Gamma_0$ заданные значения.

2. Из теоремы 3.1 следует, что при $a_{22} > k > 0$ в D, ограниченном b_2 и при регулярном поведении a_{11} и b_1 для уравнения (2) все точки границы регулярны.

Поэтому мы предположим теперь, что или $\lim_{x \to x_0 \in \Gamma_0} a_{22}(x) = 0$, или $b_2(x)$ неограниченно при $x \to x_0 \in \Gamma_0$.

Пусть, в частности,

$$r x_2^{\gamma} \leqslant a_{22}(x_1, x_2) \leqslant R x_2^{\gamma},$$

$$s x_2^{\beta} \leqslant b_2(x_1, x_2) \leqslant S x_2^{\beta},$$

где $r > 0$, R, s, S — некоторые постоянные, а коэффициенты a_{11} и b_1 удовлетворяют предположениям примера 1. В этом случае сходимость или рас-

ходимость интегралов, входящих в формулировки теорем 2.1, 2.2, 3.1 и 3.2, легко проверяется и для каждого типа границы достаточно выполнения одного из условий 1,2 или 3 в приводимой ниже таблице.

Тип границы	1	2	3
1) Γ_0 притягивает	$\beta-\alpha+1>0$	$\beta-\alpha+1=0$ и $S<r$	$\beta-\alpha+1<0$ и $S<0$
2) Γ_0 отталкивает	—	$\beta-\alpha+1=0$, $s>R$ и $\beta\leqslant 0$	$\beta-\alpha+1<0$, $s>0$ и $\beta\leqslant 0$
3) Γ_0 состоит из регулярных точек	$\beta-\alpha+1>0$ $\alpha<2$	$\beta-\alpha+1=0$, $S<r$ и $\alpha<2$	$\beta-\alpha+1<0$, $S<0$ и $\beta<1$ или $\beta-\alpha+1<0$; $S=0$ и $\alpha>2$
4) Γ_0 недостижим	$\beta-\alpha+1>0$ и $\alpha\geqslant 2$	$\beta-\alpha+1=0$, $s\geqslant R$ или $\beta-\alpha+1=0$, $s<R$ и $\alpha\geqslant 2$	$\beta-\alpha+1=0$ и $s>0$ или $\beta-\alpha+1<0$; $s=0$ и $\alpha\geqslant 2$ или $\beta-\alpha+1<0$; $s<0$ и $\beta\geqslant 1$

Рассмотрим два частных случая.

А) $\beta=0$; этот случай рассматривался в [1] и [3]; в частности, результаты из [1] получаются, если положить $r=R=1$.

Б) $\alpha=0$. Это означает, что коэффициент a_{22} не вырождается: $0<r\leqslant a_{22}(x)\leqslant R$.

Из приведенной выше таблицы видно, что в этом случае Γ_0 состоит из регулярных точек, если соблюдается одно из следующих условий:

1) $\beta>-1$, 2) $\beta=-1$ и $b_2(x_1x_2)x_2<r$ в $\mathfrak{U}_{\Gamma_0}$,

3) $\beta<-1$ и $b_2(x)\leqslant 0$ в $\mathfrak{U}_{\Gamma_0}$.

Γ_0 отталкивает, если соблюдается одно из двух условий 1) $\beta<-1$ и $b_2(x)>0$ в $\mathfrak{U}_{\Gamma_0}$, 2) $\beta=-1$ и $b_2(x_1,x_2)x_2\geqslant R$.

3. Пусть отрезок Γ_0 отталкивающий и в области D задана функция $f(x)$ такая, что $f(x)|_\Gamma=0$, а $f(x)|_{\Gamma_0}\geqslant 0$.

Ясно из теоремы 2.2, что решение $u_\eta(x)$ уравнения (2), принимающее на Γ_η значения $f(x)$, заметно отлично от нуля лишь в небольшой полосе вблизи прямой $x_2=\eta$. Нетрудно оценить ширину этого «пограничного слоя» для частных случаев. Пусть выполнены предположения примера 2 и пусть $\beta=0$; $\alpha=1$ и $s>0$. Тогда Γ_0 отталкивает.

Нетрудно подсчитать, используя замечание к лемме 2.3, что ширина пограничного слоя в классе степенных функций имеет в этом случае порядок η^α (функция $u_\eta(x)$ стремится к нулю равномерно в области $D\cap\{x_2>\eta+\eta^\beta\}$ при любом $\beta<\alpha$ и u_η может не стремиться к нулю при $x_2=\eta+\eta^\alpha$).

В заключение сделаем несколько замечаний.

1. Методом, аналогичным вышеизложенному, можно исследовать процесс $\overline{X}_t$ с обрыванием в момент $\tilde{\tau}$, определяемый соотношением (3). Свойства переходных вероятностей такого процесса тесно связаны со свойствами решений и различными постановками первой краевой задачи для уравнения

$$Lu-Cu=0\quad(C>0).$$

2. Абсолютная сходимость интеграла вида $\int_0^{\tilde{\tau}} D(\tilde{X}_t)\,dt$ с вероятностью единица тесно связана (как это доказано в [12] для одномерного случая с $C \equiv 0$) с существованием ограниченного решения первой краевой задачи для общего линейного эллиптического уравнения $Lu - Cu = -D$. Можно дать достаточные условия, близкие к необходимым, для абсолютной сходимости (расходимости) этого интеграла в терминах коэффициентов уравнения.

3. Использованный метод позволяет также найти условия существования единственного неоднородного процесса, описываемого параболическим уравнением с коэффициентами, зависящими от времени. Это связано с различными постановками первой краевой задачи для параболических уравнений. Некоторые результаты в этом направлении опубликованы в [21] без доказательства.

Всем этим вопросам автор предполагает посвятить отдельную статью.

Дополнение

Данные в §§ 2 и 3 определения различных типов границ применимы к более широкому классу процессов, чем те, которые рассматривались выше. Поэтому мы теперь не будем ограничиваться случаем диффузионных процессов.

Пусть $X = \{X_t, \tau, M_t, \mathbf{P}_x\}$ — строго марковский случайный процесс в области G полного метрического пространства такой, что его часть $X' = \{X'_t, \tau', M'_t, \mathbf{P}'_x\}$ в G' есть строго марковский процесс, с непрерывными траекториями вплоть до границы $\Gamma_{G'}$ области G', если $G' \cup \Gamma_{G'} \subset G$ и $\tau = \lim_{G' \to G} \tau'$. Пусть Γ — некоторое σ-компактное множество граничных точек области G, каждая точка которого регулярна для процесса X в области G в смысле определения § 3.

Пусть Γ^τ, как и прежде, случайное множество предельных точек процесса X_t при $t \to \tau$. Обозначим $A = \{\Gamma^\tau \cap \Gamma \neq 0\}$, $B = \{$множество Γ^τ состоит из одной точки, принадлежащей $\Gamma\}$.

Лемма. *Вероятность* $\mathbf{P}_x\{A \cap \overline{B}\} = 0$ *для любой точки* $x \in G$.

Доказательство. 1) Заметим, что достаточно доказать лемму для компактного множества Γ, так как переход к σ-компактному множеству тривиален.

2) Если каждая точка множества Γ регулярна, то для каждого $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\mathbf{P}_y\{\Gamma^\tau \subset \mathfrak{U}_\eta(x)\} > 1 - \varepsilon$ для всех $x \in \Gamma$, как только $\rho(x, y) < \delta$. (Здесь $\mathfrak{U}_\eta(x)$ есть η-окрестность точки x.) Мы будем говорить в этом случае, что множество Γ равномерно регулярно. Доказательство этого утверждения легко получить, используя компактность множества Γ.

3) Пусть $\eta_n > 0$ — произвольная последовательность, стремящаяся к нулю. Используя равномерную регулярность множества Γ, выберем последовательность $\delta_n \to 0$ такую, что $\mathbf{P}_y\{\Gamma^\tau \subset \mathfrak{U}_{\eta_n}(x)\} > 1 - \frac{1}{n^2}$ при $\rho(y, x) < \delta_n$ для всех $x \in \Gamma$.

Обозначим $\mathfrak{U}_n\delta_n$-окрестность множества Γ, γ_n — часть границы множества $\mathfrak{U}_n$, принадлежащую G; τ_n — время достижения границы множества $G \setminus \mathfrak{U}_n$ процессом X, Γ^{τ_n} — множество предельных точек процесса X при $t \to \tau_n$. Каждой точке x множества $\mathfrak{U}_n$ и его границы поставим в соответствие точку $y \in \Gamma$ такую, что $\rho(x, y) \leqslant \delta_n$: $y = f_n(x)$. Заметим, что $A \cap \overline{B} \subset \subset \bigcup_{n=N}^{\infty} \{\Gamma^{\tau_n} \cap \gamma_n$ содержит хотя бы одну точку $x_n(\omega)\} \cap \{\Gamma^{\tau_n} \not\subset \mathfrak{U}_{\eta_n}[f_n(x_n(\omega))]\}$ при любом N. Отсюда следует, что $\mathbf{P}_x\{A \cap \overline{B}\}^n \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \mathbf{P}_x[\{\Gamma^{\tau_n} \cap \gamma_n$ содержит хотя бы одну точку $x_n(\omega)\} \cap \{\Gamma^{\tau} \not\subset \mathfrak{U}_{\eta_n}[f_n(x_n(\omega))]\}]$.

Для почти всех траекторий множество $\Gamma^{\tau_n} \cap \gamma_n$ состоит не более чем из одной точки (в силу непрерывности процесса X в G). Поэтому

$$\mathbf{P}_x\{A \cap \overline{B}\} \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \int_{y_n \in \gamma_n} \mathbf{P}_x\{\Gamma^{\tau_n} \in dy_n\}\, \mathbf{P}_{y_n}\{\Gamma^{\tau} \not\subset \mathfrak{U}_{\eta_n}[f_n(y_n)]\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \sup_{y \in \gamma_n} \mathbf{P}_y\{\Gamma^{\tau} \not\subset \mathfrak{U}_{\eta_n}(f_n(y))\} \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

В силу произвольности N имеем: $\mathbf{P}_x\{A \cap \overline{B}\} = 0$.

Следствия

1. *Если все точки границы Γ области D регулярны, а граница компактна, то множество Γ^{τ} с вероятностью единица состоит из одной точки. Это значит, что случайную величину X_{τ} можно определить таким образом, что траектория X_{τ} процесса будет непрерывна в замкнутой области $D \cup \Gamma$.*

2. *Если граница Γ области D допускает представление: $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 — недостижимо, а Γ_2 есть σ-компактное множество регулярных точек, то множество Γ^{τ} с вероятностью единица состоит из одной точки.*

Эти следствия были использованы нами в §§ 1 и 3.

Поступила в редакцию
18.4.58

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Кельыш, ДАН СССР, 77, 2 (1951), 181.
[2] О. А. Олейник, ДАН СССР, 87, 6 (1952), 885.
[3] М. И. Вишик, Матем. сб., 37(77) (1954); 3, 513—568.
[4] Р. З. Хасьминский, Теория вероят. и ее примен., II, 4 (1957), 482.
[5] Е. Б. Дынкин, Марковские процессы, Гостехиздат (выйдет в 1958 г.).
[6] Е. Б. Дынкин и А. А. Юшкевич, Теор. вероят. и ее примен., I, вып. 1 (1956), 149.
[7] И. Г. Петровский, Uber das Irrfahrtproblem, Mathematische Annalen, Bd. 109, 425.
[8] А. Н. Колмогоров, Успехи матем. наук, вып. 5 (1938), 5—41.
[9] J. L. Doob, Transactions of the Amer. Math. Soc., 77, 1, (1954), 86.

[10] J. L. Doob, Transactions of the Amer. Math. Soc., **80**, 1 (1955), 216.
[11] Е. Б. Дынкин, Труды III Весоюзного матем. съезда, т. II, 44.
[12] Р. З. Хасьминский, ДАН СССР, **104**, 1 (1955), 22—25.
[13] K. Ito, Nagoya Mat. Journ, **I**, 1 (1955).
[14] Е. Б. Дынкин, ДАН СССР, **104**, 5 (1955), 691.
[15] И. В. Гирсанов, Сильно феллеровские процессы. Будет опубликовано в журн. «Теория вероятностей и ее применения».
[16] С. Н. Бернштейн, ДАН СССР, **18**, 7 (1938), 385—388.
[17] М. И. Вишик и Л. А. Люстерник, Успехи матем. наук, **12**, 5 (1957).
[18] W. Feller, Annales of Math., **55**, 3 (1952), 467.
[19] И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными. Гостехиздат, 1950.
[20] В. А. Волконский, О случайной замене времени, Теория вероят. и ее примен., III, 3 (1958).

DIFFUSION PROCESSES AND ELLIPTIC EQUATIONS DEGENERATING AT THE BOUNDARY OF THE REGION

R. Z. HASMINSKY (MOSCOW)

(*Summary*)

In this paper Markov diffusion processes with continuous paths are studied. We give the definitions of attracting, repulsive, unattainable and regular boundary.

Effective sufficient conditions for each type expressed in terms of the coefficients of the equation (2) are gven too. These conditions are also necessary for additional assumptions.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том III Выпуск 4
1958

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ФИНАЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ МНОГОМЕРНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА, ОПИСЫВАЮЩЕГО ДЕЙСТВИЕ НЕКОТОРЫХ ДВУХКАСКАДНЫХ ТЕЛЕФОННЫХ СИСТЕМ С ОТКАЗАМИ

Г. П. БАШАРИН

В настоящей статье рассматривается одна из задач математической теории массового обслуживания, возникающая при изучении многокаскадных телефонных систем с отказами. Известно, что если на n обслуживающих линий поступает пуассоновский поток вызовов, время занятия линий имеет экспоненциальное распределение и не зависит от потока вызовов, то вероятности числа занятых линий определяются при помощи формул Эрланга (см. [1], гл. 6; [4]). Б. А. Севастьянов [2] доказал справедливость формул Эрланга для произвольного распределения времени занятия линий с конечным математическим ожиданием. В телефонии формулы Эрланга могут быть применены, например, в случае, когда N абонентов подключено к одному коммутатору с N входами и n выходными линиями, где $N \gg n$. Вероятность отказа в этом случае совпадает с вероятностью занятия n линий.

В настоящее время для обслуживания поступающего потока вызовов на АТС применяются сложные коммутационные схемы, состоящие из большого числа коммутаторов, находящихся в определенном взаимодействии друг с другом (см. [5]). В связи с этим возникает необходимость в изучении вероятностного режима работы телефонных систем более сложных, чем те, к которым применимы формулы Эрланга.

Ниже вычисляются финальные вероятности многомерного марковского процесса с непрерывным временем и конечным числом состояний, описывающего действие двухкаскадной телефонной системы с одним коммутатором во втором каскаде (см. § 1), на которую поступают независимые пуассоновские потоки вызовов, а время занятия линий имеет экспоненциальное распределение. Финальные вероятности используются для вывода формул, являющихся обобщением формул Эрланга на рассматриваемый многомерный случай.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим двухкаскадную систему, состоящую из k коммутаторов $A_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ первого каскада и одного коммутатора B второго каскада. Коммутатор A_i имеет n_i входов и m_i выходов, каждый из которых связан с определенным входом коммутатора B, имеющего $\sum_1^k m_i$ входов и l выходов. Предположим, что на входы коммутатора A_i поступает пуассоновский поток вызовов с постоянной интенсивностью $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, k)$, причем потоки, поступающие на различные коммутаторы, взаимно независимы. Каждый из вызовов, поступивших на коммутатор A_i, может быть направлен по любому из свободных соединительных путей этого коммутатора на коммутатор B. Порядок занятия соединительных путей может быть любым случайным и равновероятным, или последовательным. Порядок занятия выходов коммутатора B определяется назначением схемы и может быть двояким: либо вызов с равной вероятностью занимает любой из свободных

выходов, либо одновременно с поступлением вызова на коммутатор A_i становится известным номер выходной линии коммутатора B, на которую он адресован. По телефонной терминологии, которую мы здесь будем использовать, в первом случае схема работает в режиме свободного искания, во втором — в режиме направленного искания. Во втором случае обозначим через η_{ij} постоянную вероятность того, что вызов, поступивший на коммутатор A_i, адресован на выходную линию j коммутатора B ($i = 1, 2, \ldots, k$; $j = 1, 2, \ldots, l$; $\sum_{j=1}^{l} \eta_{ij} = 1$). Если $a_i = \min(n_i, m_i)$, то вызов, поступивший на коммутатор A_i, получает отказ в том случае, если в момент его поступления уже велось a_i разговоров или если занята та выходная линия коммутатора B, на которую он адресован. При работе системы в режиме свободного искания отказ за счет коммутатора B происходит только тогда, когда заняты все его выходные линии. В дальнейшем будем предполагать, что время занятия линии вызовом с коммутатора A_i имеет экспоненциальное распределение со средним значением μ_i ($i = 1, 2, \ldots k$) и что продолжительность занятия одной линии не зависит от продолжительности занятия других линий, а также от потока поступающих вызовов.

§ 2. Финальные вероятности многомерного марковского процесса, описывающего работу схемы в режиме направленного искания

1. Рассмотрим многомерный случайный процесс $\xi(t) = \| \xi_{ij}(t) \|$ ($i = 1, 2, \ldots, k$; $j = 1, 2, \ldots l$), компонента $\xi_{ij}(t)$ которого равна 1, если в момент t вызов с коммутатора занимает выходную линию j коммутатора B и равна 0 в противном случае. Возможные состояния процесса представляют собой матрицу $\| s_{ij} \|$ ($i = 1, 2, \ldots, k$; $j = 1, 2, \ldots, l$), элементы которой равны 0 или 1 и удовлетворяют следующим условиям:

$$
\begin{aligned}
& s_{\cdot j} = 0, 1, \quad j = 1, 2, \ldots, l \\
& 0 \leqslant s_{i\cdot} \leqslant a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k \\
& 0 \leqslant s_{\cdot\cdot} \leqslant \min\left(l, \sum_{1}^{k} a_i\right) = b,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где

$$
s_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{k} s_{ij}, \quad s_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{l} s_{ij}, \quad s_{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} s_{ij}.
$$

Пространство матриц $\| s_{ij} \|$, удовлетворяющих условиям (1), обозначим через Ω. Из сделанных в § 1 предположений о поступающем потоке вызовов, о распределении времени занятия линий и об их взаимной независимости следует, что процесс $\xi(t)$, определенный в пространстве Ω, будет однородным марковским процессом. Обозначим через $\mathbf{P}\{ \| s_{ij} \|; t \}$ вероятность того, что система в момент t находится в состоянии $\| s_{ij} \|$, а через $\mathbf{P}\{ \| s_{ij} \|, t, \| u_{ij} \| \}$ вероятность перехода из состояния $\| s_{ij} \|$ в состояние $\| u_{ij} \|$ за время t ($t \geqslant 0$). Процесс $\xi(t)$ определяется следующими переходными вероятностями за время Δt ($\| s_{ij} \| \in \Omega$):

$$
\mathbf{P}\{ \| s_{i1}, \ldots, s_{ij} - 1, \ldots, s_{il} \|, \Delta t, \| s_{i1}, \ldots, s_{ij}, \ldots, s_{il} \| \} = \lambda_i \eta_{ij} s_{ij} \Delta t + o(\Delta t)
$$

(поступил один вызов с коммутатора A_i на выходную линию j коммутатора B);

$$
\mathbf{P}\{ \| s_{i1}, \ldots, s_{ij} + 1, \ldots, s_{il} \|, \Delta t, \| s_{i1}, \ldots, s_{ij}, \ldots, s_{il} \| \} =
$$

$$
= \begin{cases} \dfrac{\Delta t}{\mu_i}(1 - s_{\cdot j}) + o(\Delta t), & \text{если } \| s_{i1}, \ldots, s_{ij} + 1, \ldots, s_{il} \| \in \Omega \\ 0 & \text{если } \| s_{i1}, \ldots, s_{ij} + 1, \ldots, s_{il} \| \notin \Omega \end{cases}
$$

(окончился один разговор, проходивший через коммутатор A_i и выходную линию j коммутатора B);

$$\mathbf{P}\{\|s_{ij}\|, \Delta t \|s_{ij}\|\} = 1 - \sum_{i=1}^{k}{}^{*} \lambda_i \Delta t \sum_{j=1}^{l} \eta_{ij}(1 - s_{.j}) - \sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta t}{\mu_i} \sum_{j=1}^{l} s_{ij} + o(\Delta t)$$

(не поступило ни одного вызова и не окончился ни один разговор).

Остальные вероятности перехода имеют более высокий порядок малости. Отметим, что в сумме $\sum_{i=1}^{k}{}^{*}$ равны 0 те слагаемые, для которых $s_i = a_i$, и что вся сумма обращается в 0, если $s_{..} = b$ (условие C).

2. Используя уравнение Колмогорова—Чэпмана и вычисленные выше переходные вероятности, получим:

$$\mathbf{P}\{\|s_{ij}\|; t + \Delta t\} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \mathbf{P}\{\|s_{i1}, \ldots, s_{ij} - 1, \ldots, s_{il}\|; t\} \lambda_i \eta_{ij} s_{ij} \Delta t +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k}{}^{*} \sum_{j=1}^{l} \mathbf{P}\{\|s_{i1}, \ldots, s_{ij} + 1, \ldots, s_{il}\|; t\} \frac{\Delta t}{\mu_i}(1 - s_{.j}) +$$

$$+ \mathbf{P}\{\|s_{ij}\|; t\}\left[1 - \sum_{i=1}^{k}{}^{*} \lambda_i \Delta t \sum_{j=1}^{l} \eta_{ij}(1 - s_{.j}) - \sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta t}{\mu_i} \sum_{j=1}^{l} s_{ij}\right] + o(\Delta t).$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим систему линейных дифференциальных уравнений относительно $\mathbf{P}\{\|s_{ij}\|; t\}$ с начальным распределением вероятностей $\mathbf{P}\{\|s_{ij}\|: 0\}$ в Ω, нормировочным условием

$$\sum_{\Omega} \mathbf{P}\{\|s_{ij}\|; t\} = 1 \quad (t \geqslant 0),$$

и граничным условием C:

$$\frac{d\mathbf{P}\{\|s_{ij}\|; t\}}{dt} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \mathbf{P}\{\|s_{i1}, \ldots, s_{ij} - 1, \ldots, s_{il}\|; t\} \lambda_i \eta_{ij} s_{ij} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k}{}^{*} \sum_{j=1}^{l} \mathbf{P}\{\|s_{i1}, \ldots, s_{ij} + 1, \ldots, s_{il}\|; t\} \frac{1 - s_{.j}}{\mu_i} - \mathbf{P}\{\|s_{ij}\|; t\}\left[\sum_{i=1}^{k}{}^{*} \lambda_i \sum_{j=1}^{l} \eta_{ij}(1 - s_{.j}) - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{s_{ij}}{\mu_i}\right]. \tag{2}$$

Число уравнений системы равно числу неизвестных. Поскольку рассматриваемый процесс транзитивный (см. [1], § 19; [3], гл. 3), то существует единственная система финальных вероятностей $p(\|s_{ij}\|)$, не зависящих от начального распределения вероятностей и удовлетворяющих системе линейных однородных уравнений

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} p(\|s_{i1}, \ldots, s_{ij} - 1, \ldots, s_{il}\|) \lambda_i \eta_{ij} s_{ij} - p(\|s_{ij}\|) \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{s_{ij}}{\mu_i} =$$

$$= p(\|s_{ij}\|) \sum_{i=1}^{k}{}^{*} \sum_{j=1}^{l} \lambda_i \eta_{ij}(1 - s_{.j}) - \sum_{i=1}^{k}{}^{*} \sum_{j=1}^{l} p(\|s_{i1}, \ldots, s_{ij} + 1, \ldots, s_{il}\|) \frac{1 - s_{.j}}{\mu_i} \tag{3}$$

с граничным условием C и нормировочным условием

$$\sum_{\Omega} p(\|s_{ij}\|) = 1. \tag{4}$$

3. Система уравнений (3) сводится к двум следующим эквивалентным рекуррентным соотношениям ($\|s_{ij}\| \in \Omega$):

$$p(\|s_{i1}, \ldots, s_{ij} - 1, \ldots, s_{il}\|) \lambda_i \eta_{ij} = p(\|s_{ij}\|) \frac{1}{\mu_i} \quad \text{при } s_{ij} = 1, \tag{5}$$

$$p(\| s_{ij} \|)\lambda_i\eta_{ij} = p(\| s_{i1},\ldots,s_{ij}+1,\ldots,s_{il} \|)\frac{1}{\mu_i} \text{ при } s_{ij}=s_{.j}=0 \text{ и } \| s_{i1},\ldots,s_{ij}+1,\ldots,s_{il} \| \in \Omega. \tag{5A}$$

Используя одно из этих соотношений, например первое, и нормировочное условие (4), получаем:

$$p(\| s_{ij} \|) = \prod_{i=1}^{k}(\lambda_i\mu_i)^{s_{i.}} \prod_{j=1}^{l}\eta_{ij}^{s_{ij}} : \sum_{\| u_{ij} \| \in \Omega} \prod_{i=1}^{k}(\lambda_i\mu_i)^{u_{i.}} \prod_{j=1}^{l}\eta_{ij}^{u_{ij}}. \tag{6}$$

Формула (6) определяет финальные вероятности рассматриваемого марковского процесса.

4. Соотношения (5) и (5А) можно интерпретировать как „уравнения статистического равновесия" (см. [4], [5]). Рассмотрим для определенности первое из этих уравнений. Согласно этому уравнению, вероятность перехода системы за время Δt из состояния $\| s_{i1},\ldots,s_{ij}-1,\ldots,s_{il} \|$ в соседнее „верхнее" состояние $\| s_{i1},\ldots,s_{ij},\ldots,s_{il} \|$ равна вероятности обратного перехода системы из состояния $\| s_{i1},\ldots,s_{ij},\ldots,s_{il} \|$ в соседнее „нижнее" состояние $\| s_{i1},\ldots,s_{ij}-1,\ldots,s_{il} \|$. Такая интерпретация делает, очевидно, эквивалентность соотношений (5) и (5А).

Замечание. Рассмотрим случай, когда источники вызовов совпадают со входами коммутаторов первого каскада, причем число входов имеет тот же порядок, что и число выходов. В этом случае поток, поступающий на коммутатор A_i, складывается из потоков, поступающих на каждый из n_i входов этого коммутатора, и, следовательно, интенсивность суммарного потока зависит от числа $\xi_{i.}(t)$ вызовов, обслуживаемых в данный момент. Предположим, что каждый из n_i слагаемых потоков является пуассоновским, т. е. обладает свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия (см. [1], гл. 1), и что интенсивность каждого из слагаемых потоков равна $\delta_i (i = 1, 2 \ldots k)$. Тогда все предыдущие рассуждения сохраняют свою силу, если в формулах переходных вероятностей заменить λ_i на $(n_i - s_{i.}+1)\delta_i$ (соответственно на $(n_i - s_{i.})\delta_i$). Для определения финальных вероятностей служит рекуррентная формула:

$$p(\| s_{i1},\ldots,s_{ij}-1,\ldots,s_{il} \|)(n_i - s_{i.}+1)\delta_i\eta_{ij} = p(\| s_{i1},\ldots,s_{ij},\ldots,s_{il} \|)\frac{1}{\mu_i}$$
$$s_{ij} \neq 0, \quad \| s_{ij} \| \in \Omega. \tag{7}$$

Следовательно,

$$p(\| s_{ij} \|) = \prod_{i=1}^{k}(\delta_i\mu_i)^{s_{i.}}\frac{n_i!}{(n_i - s_{i.})!}\prod_{j=1}^{l}\eta_{ij}^{s_{ij}}\, p(0), \tag{8}$$

где вероятность нулевого состояния определяется из условия (4). По телефонной терминологии рассмотренный в этом замечании случай называется случаем Бернулли, а рассмотренный ранее—случаем Эрланга. В дальнейшем будем рассматривать только случай Эрланга, так как соответствующие результаты с очевидными изменениями имеют место и в случае Бернулли.

§ 3. Финальные вероятности марковского процесса для случая свободного искания

1. Здесь, как и в дальнейшем, будем использовать индексы d и f для обозначения вероятностей, относящихся, соответственно, к направленному и свободному исканию. При работе схемы в режиме свободного искания поступивший вызов с равной вероятностью занимает любой из свободных выходов коммутатора B. Поэтому

$$\mathbf{P}\{\| s_{i1},\ldots,s_{ij}-1,\ldots,s_{il} \|, \Delta t, \| s_{i1},\ldots,s_{ij}\ldots,s_{il} \|\} = \frac{\lambda_i s_{ij}\Delta t}{l - s_{..}+1} + o(\Delta t).$$

Все остальные выводы предыдущего параграфа не претерпевают никакого изменения. Рекуррентная формула имеет следующий вид:

$$p_f(\| s_{i1},\ldots,s_{ij}-1,\ldots,s_{il} \|)\frac{\lambda_i}{l - s_{..}+1} = p_f(\| s_{i1},\ldots,s_{ij},\ldots,s_{il} \|)\frac{1}{\mu_i}, s_{ij} \neq 0, \quad \| s_{ij} \| \in \Omega. \tag{9}$$

Следовательно,

$$p_f(\| s_{ij} \|) = \frac{(l - s_{..})!}{l!} \prod_1^k (\lambda_i \mu_i)^{s_{i.}} p_f(0), \tag{10}$$

где $p_f(0)$ определяется из условия (4).

2. Отметим, что при работе схемы в режиме свободного искания вероятности $p_f(\| s_{ij} \|)$ не зависят от расположения элементов в столбцах матрицы $\| s_{ij} \|$ и являются функцией только от сумм элементов в строках этой матрицы. Так как при фиксированных значениях $s_{1.}, s_{2.}, \ldots, s_{k.}$ можно образовать $\binom{l}{s_{..}} \frac{s_{..}!}{\prod_1^k s_{i.}!}$ равновероятных матриц $\| s_{ij} \|$, то

$$p_f(s_{1.}, s_{2.}, \ldots, s_{k.}) = \prod_1^k \frac{(\lambda_i \mu_i)^{s_{i.}}}{s_{i.}!} : \sum_{\Omega_1} \prod_1^k \frac{(\lambda_i \mu_i)^{u_i}}{u_i}, \quad (s_{1.}, s_{2.}, \ldots, s_{k.}) \in \Omega_1 \tag{11}$$

где Ω_1 есть k-мерное пространство векторов $(s_{1.}, s_{2.}, \ldots, s_{k.})$, удовлетворяющих условиям $0 \leqslant s_{i.} \leqslant a_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$; $0 \leqslant s_{..} \leqslant b$. Этот результат совпадает с соответствующим результатом работы [6], где он был получен прямым методом.

§ 4. О совместном распределении чисел занятых линий коммутаторов A_i в случае направленного искания

Предположим, что $\eta_{ij} = \eta_j$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Тогда

$$p_d(\| s_{ij} \|) = \prod_{i=1}^k (\lambda_i \mu_i)^{s_{i.}} \prod_{j=1}^l \eta_j^{s_{.j}} p_d(0) \tag{12}$$

и, следовательно, все состояния $\| s_{ij} \|$ с фиксированными суммами элементов по строкам и по столбцам имеют одинаковую финальную вероятность (12). Так как число матриц с фиксированными суммами $s_{1.}, \ldots, s_{k.}$; $s_{.1}, \ldots, s_{.l}$ равно $\frac{s_{..}!}{\prod_1^k s_{i.}!}$, то

$$p_d(s_{1.}, \ldots, s_{k.};\ s_{.1}, \ldots, s_{.l}) = s_{..}! \prod_1^k \frac{(\lambda_i \mu_i)^{s_{i.}}}{s_{i.}!} \prod_1^l \eta_j^{s_{.j}} p_d(0).$$

Если все направления равновероятны $\left(\eta_j = \frac{1}{l},\ j = 1, 2, \ldots, l\right)$, то

$$p_d(s_{1.}, \ldots, s_{k.};\ s_{.1}, \ldots, s_{.l}) = \frac{s_{..}!}{l^{s_{..}}} \prod_1^k \frac{(\lambda_i \mu_i)^{s_{i.}}}{s_{i.}!} p_d(0).$$

Поскольку существует $\binom{l}{s_{..}}$ вариантов занятия $s_{..}$ выходных линий коммутатора B, то совместное распределение чисел занятых линий коммутаторов A_i при равной вероятности всех направлений коммутатора B определяется следующей формулой:

$$p_d(s_{1.}, \ldots, s_{k.}) = \beta(s_{..}) \prod_1^k \frac{(\lambda_i \mu_i)^{s_{i.}}}{s_{i.}!} : \sum_{\Omega_1} \beta(u_{..}) \prod_1^k \frac{(\lambda_i \mu_i)^{u_{i.}}}{u_{i.}!} \quad (s_1, \ldots, s_k) \in \Omega_1, \tag{13}$$

где $\beta(r) = \binom{l}{r} \frac{r!}{l^r} = \prod_{d=0}^{r-1} \left(1 - \frac{d}{l}\right)$ при $1 \leqslant r \leqslant b$ и $\beta(0) = 1$.

Полагая в этой формуле $\beta(r) \equiv 1$, получим аналогичную формулу для случая свободного искания.

§ 5. О распределении общего числа занятых линий

1. Обозначим через π_r множество точек с целочисленными координатами плоскости $s_1 + s_2 + \ldots + s_k = r$, а через $\Omega_1 \cap \pi_r$ — пересечение множеств Ω_1 и π_r. Вероятность того, что в случае направленного искания с одинаковой вероятностью занятия выходных линий коммутатора B общее число занятых линий равно r, определяется суммированием вероятностей (13) по всем точкам множества $\Omega_1 \cap \pi_r$:

$$p_d(s_{\cdot\cdot} = r) = \beta(r) \sum_{\Omega_1 \cap \pi_r} \prod_{i=1}^{k} \frac{(\lambda_i \mu_i)^{s_i}}{s_i!}\, p_d(0). \tag{14}$$

Обозначим $\min\limits_{i=1,\ldots,k} a_i = a$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \mu_i = \Lambda$, $\frac{\lambda_i \mu_i}{\Lambda} = \gamma_i$ $(i = 1, 2, \ldots k)$, $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \ldots \gamma_k)$ и предположим, что $l > a$. Поскольку, при $0 \leqslant r \leqslant a$ множество $\Omega_1 \cap \pi_r$ совпадает с частью множества π_r, расположенной в первом квадранте, то производя суммирование в формуле (14), получим:

$$p_d(s_{\cdot\cdot} = r) = \frac{\Lambda^r}{r!} \beta(r)\, p_d(0), \quad 0 \leqslant r \leqslant a.$$

Выполняя суммирование при $r > a$ и обозначая

$$\underset{\vec{\gamma}}{\alpha \to}(r) = \sum_{\Omega \cap \pi_r} r! \prod_{i=1}^{k} \frac{\gamma_i^{s_i}}{s_i!}, \quad a < r \leqslant b, \tag{15}$$

можно записать следующую общую формулу

$$p_d(s_{\cdot\cdot} = r) \frac{\Lambda^r}{r!} \beta(r) \underset{\vec{\gamma}}{\alpha \to}(r): \sum_{r=0}^{b} \frac{\Lambda^r}{r!} \beta(r) \underset{\vec{\gamma}}{\alpha \to}(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant b, \tag{16}$$

где принято, что $\underset{\vec{\gamma}}{\alpha \to}(r) = 1$ при $0 \leqslant r \leqslant a$.

2. При $l \leqslant a$ получаем формулы для пучка из l линий, на который поступает пуассоновский поток вызовов с параметром Λ, а вероятность направления вызова на каждую из l линий постоянна и равна $\frac{1}{l}$:

$$p_d(s_{\cdot\cdot} = r) = \frac{\Lambda^r}{r!} \beta(r): \sum_{r=0}^{l} \frac{\Lambda^r}{r!} \beta(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant l. \tag{17}$$

Отметим, что всегда $0 < \underset{\vec{\gamma}}{\alpha \to}(r) \leqslant 1$ и $0 < \beta(r) \leqslant 1$ $(0 \leqslant r \leqslant b)$. Функция $\underset{\vec{\gamma}}{\alpha \to}(r)$ при больших r может быть аппроксимирована посредством k-мерного нормального распределения ранга $k-1$, а при $k=2$ легко находится при помощи таблиц неполной бэта-функции.

3. Полагая в формулах (14) — (17) $\beta(r) \equiv 1$, получим аналогичные формулы для случая свободного искания. В частности, формула (17) превращается в обычную формулу Эрланга для пучка из l линий, на который поступает пуассоновский поток вызовов с параметром Λ.

Поступила в редакцию
25.5.58

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Я. Хинчин, Математические методы теории массового обслуживания, Тр. матем. ин-та им. Стеклова, **XLIX**, 1955.

[2] Б. А. Севастьянов, Эргодическая теорема для марковских процессов и ее при-

ложение к телефонным системам с отказами, Теория вероят. и ее примен., II, вып. 1 (1957), 106—116.
[3] С. Х. Сираждинов, Предельные теоремы для однородных цепей Маркова, Ташкент, 1955.
[4] A. Jensen. An elucidation of Erlang's statistical works through the theory of stochastic processes, В сборнике «The Life and Works of A. K. Erlang», Копенгаген, 1948.
[5] A. Elldin, On equations of state for a two-stage link system, Ericsson Technics. № 1, 1956.
[6] Г. П. Башарин, Теоретико-вероятностное исследование двухкаскадной телефонной системы с отказами, работающей в режиме свободного искания, ДАН СССР, 121, 1 (1958).
[7] Г. П. Башарин, О многомерном предельном распределении чисел занятых линий в коммутаторах второго каскада телефонной системы с отказами, ДАН СССР, 121, 2 (1958).

FINAL PROBABILITIES FOR MULTI-DIMENSIONAL MARKOV PROCESSES WHICH DESCRIBE THE ACTION OF SOME TWO-STAGE TELEPHONE BUSY-SIGNAL SYSTEMS

G. P. BASHARIN (MOSCOW)

(Summary)

Final probabilities are determined for multi-dimensional Markov processes with continuous time and a finite number of states describing the action of a two-stage telephone system with one switch in the second stage.

It is assumed that service calls form independent Poisson streams of calls and that the service times have independent negative exponential distributions.

On the basis of these final probabilities some other probability formulas for a common number of the busy lines are determined. These formulas are extensions of the well known Erlang's formulas in the multi-dimensional case. Common group selection and random occupation of each free connecting device are considered.

О МНОГОМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССАХ

Е. Г. ГЛАДЫШЕВ

В работе будут получены „разложение Вольда" и необходимые и достаточные условия регулярности n-мерного стационарного случайного процесса с непрерывным временем. Основанием статьи служит дипломная работа автора, написанная под руководством Ю. А. Розанова.

Основные определения и формулировки теорем

(Ср. [1], [2])

Совокупность случайных комплексных функций

$$x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t)$$

параметр t образует n-мерный стационарный (в широком смысле) случайный процесс $x(t) = (x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t))$, если

$$\mathbf{M}x_k(t) = m_k, \quad \mathbf{M}(x_k(t+\tau)\overline{x_j(t)}) = B_{kj}(\tau) \quad (k, j = \overline{1, n}). \tag{1}$$

Очевидно, можно положить $m_k = 0$, беря $x_k(t) - m_k$ вместо $x_k(t)$. Тогда второе из равенств (1) определяет скалярное произведение в гильбертовом пространстве случайных величин.

С геометрической точки зрения удобно считать, что

$$x(t) = U_t x(0),$$

где $\{U_t\}$ — семейство унитарных операторов (см. [1]). Пусть $H_x(t)$ есть линейное замыкание случайных величин

$$\{x_k(\tau), \ k = \overline{1, n}, \ -\infty < \tau \leqslant t\}.$$

H_x есть линейное замыкание случайных величин

$$\{x_k(\tau), \ k = \overline{1, n}, \ -\infty < \tau < \infty\}.$$

Процесс $x(t)$ называется регулярным, если

$$S_k = \bigcap_t H_x(t) = 0$$

и сингулярным, если $S_x = H_x$.

Стационарный процесс $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ называется подчиненным стационарному процессу $y(t)$ $(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$, если они стационарно связаны и $H_x(t) \subseteq H_y(t)$ (t — любое).

Пусть $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_q(t))$ (t пробегает все действительные числа) есть q-мерный процесс, для которого

$$\mathbf{M}(|d\xi_k(t)|^2) = dt, \tag{2}$$

$$\mathbf{M}(\Delta_1\xi_k(t)\overline{\Delta_2\xi_j(t)}) = 0,$$

когда $k \neq j$ или $\Delta_1\Delta_2 = 0$, и $H_\xi(t)$ есть линейное замыкание случайных величин

$$\{\Delta\xi_k = \xi_k(t') - \xi_k(t''), \ k = \overline{1, q}; \ t', t'' \leqslant t\}.$$

Назовем $\xi(t)$ эквивалентным стационарному случайному процессу $x(t)$, если

$$H_\xi(t) = H_x(t) \text{ при любом } t.$$

Ниже будут доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Всякий n-мерный стационарный случайный процесс с непрерывным временем $x(t)$ допускает разложение*

$$x_k(t) = r_k(t) \oplus s_k(t), \tag{3}$$

где $r(t) = (r_1(t), r_2(t), \ldots, r_n(t))$ — регулярный, а $s(t) = (s_1(t), s_2(t), \ldots, s_n(t))$ — сингулярный процессы, подчиненные $x(t)$; причем процессы $r(t)$ и $s(t)$ определены единственным образом.

Теорема 2. *Стационарный n-мерный случайный процесс $x(t)$ с непрерывным временем регулярен в том и только в том случае, если*

$$x_k(t) = \sum_{j=1}^{q} \int_0^\infty a_{kj}(\tau)\, d\xi_j(t-\tau), \tag{4}$$

где $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_q(t))$ есть q-мерный процесс, эквивалентный $x(t)$ и удовлетворяющий условиям (2). Число q компонент ξ_j в разложении (4) называется рангом процесса $x(t)$; компоненты ξ_j определяются с точностью до унитарных преобразований

$$\xi_j'(t) = \sum_k a_{jk}\xi_j(t).$$

Теорема 3. *Стационарный n-мерный случайный процесс $x(t)$ с непрерывным временем регулярен тогда и только тогда, когда*

a) *все* $G_{kj}(\mu)$ *абсолютно непрерывны,*

b) *ранг матрицы* $\left\| \frac{dG_{kj}(\mu)}{d\mu} \right\|$ *равен почти всюду* q,

c) $\left\| \frac{dG_{kj}(\mu)}{d\mu} \right\| = \Phi(\mu) \cdot \Phi^*(\mu)$,

где

$$\Phi(\mu) = \left\| \begin{array}{ccc} \varphi_{11}(\mu) & \dots & \varphi_{1q}(\mu) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(\mu) & \dots & \varphi_{nq}(\mu) \end{array} \right\|,$$

$$\Phi^*(\mu) = \left\| \begin{array}{ccc} \overline{\varphi_{11}(\mu)} & \dots & \overline{\varphi_{n1}(\mu)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \overline{\varphi_{1q}(\mu)} & \dots & \overline{\varphi_{nq}(\mu)} \end{array} \right\|,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_{kj}(\mu)|^2 d\mu < \infty,$$

$$\varphi_{kj}(\mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{kj}(l) \left(\frac{1 - i\mu}{1 + i\mu} \right)^l \frac{1}{1 + i\mu}.$$

Теорема 4. *Для максимальной регулярности (т. е. для регулярности ранга n) n-мерного стационарного случайного процесса $x(t)$ с непрерывным временем необходимо и достаточно, чтобы*

a) *все* $G_{kj}(\mu)$ *были абсолютно непрерывны,*

b) $\det \left\| \frac{dG_{kj}(\mu)}{d\mu} \right\| > 0$ *почти всюду,*

c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \det \left\| \frac{dG_{kj}(\mu)}{d\mu} \right\|}{} d\mu > -\infty.$

$G_{kj}(\mu)$ *определяются из равенств*

$$B_{kj}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\mu} dG_{kj}(\mu), \quad G_{kj}(-\infty) = 0,$$

Доказательство теорем 1—4

Пусть $x(t)$ есть n-мерный стационарный случайный процесс с непрерывным временем и $z(\lambda) = (z_1(\lambda), z_2(\lambda), \dots, z_n(\lambda))$ — его спектральный процесс.

Условимся через $\widetilde{x}(m)$ обозначать n-мерный стационарный случайный процесс с дискретным временем, у которого спектральный процесс есть $z\left(\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}\right) = \left(z_1\left(\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}\right), z_2\left(\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}\right), \dots, z_n\left(\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}\right)\right)$ (действительная ось сжата до отрезка $[-\pi, \pi]$).

Лемма 1. *Процессы $x(t)$ и $\widetilde{x}(m)$ одновременно сингулярны.*

Лемма 2. *Пусть $y(t)$ подчинен $x(t)$, тогда $\widetilde{y}(m)$ подчинен $\widetilde{x}(m)$ (и обратно).*

Лемма 1 для одномерного случая фактически содержится в работе [4]. Приведенное там доказательство без изменений переносится на n-мерный случай. При этом попутно получаем, что

$$H_{\widetilde{x}}(0) = H_x(0). \tag{5}$$

Равенство (5) доказывает лемму 2, так как

$$H_{\widetilde{x}}(0) = H_x(0),\ H_{\widetilde{y}}(0) = H_y(0),\ H_y(0) \subseteq H_x(0).$$

Отсюда $H_{\widetilde{y}}(0) \subseteq H_{\widetilde{x}}(0)$, и поскольку

$$H_{\widetilde{x}}(m) = U_m H_{\widetilde{x}}(0),\ H_{\widetilde{y}}(m) = U_m H_{\widetilde{y}}(0),\ \text{то}$$

$$H_{\widetilde{y}}(m) \subseteq H_{\widetilde{x}}(m).$$

Теперь можно доказать теоремы 1—4. Пусть процесс $x(t)$ такой, что $\widetilde{x}(m)$ регулярен. Тогда

$$x_k(m) = \sum_{j=1}^{q} \sum_{l=0}^{\infty} c_{kj}(l)\, u_j(m-l),$$

где $u(m) = (u_1(m),\ u_2(m),\ \ldots,\ u_q(m))$ есть q-мерный стационарный процесс с дискретным временем, для которого

$$\mathbf{M}(|u_k(m)|^2) = 1,$$

$$\mathbf{M}(u_k(m_1)\,\overline{u_j(m_2)}) = 0,$$

когда $k \neq j$ или $m_1 \neq m_2$, и $H_u(m) = H_x(m)$ при всех m (см., например, [2]).

Введем

$$\widetilde{x}_{kj}(m) = \sum_{l=0}^{\infty} c_{kj}(l)\, u_j(m-l). \tag{6}$$

Из (6) видно, что процесс $\widetilde{x}_{kj}(m)$ подчинен $u_j(m)$. По лемме 2 процесс $x_{kj}(t)$ подчинен $v_j(t)$, где $v_j(t)$ соответствует $u_j(m)$.

Далее,

$$v_j(t) = \int_0^{\infty} a_j(\tau)\, d\xi_j(t-\tau) \qquad (j = \overline{1, q}),$$

где процесс $\xi(t) = (\xi_1(t),\ \xi_2(t),\ \ldots,\ \xi_q(t))$ удовлетворяет условиям (2) и $H_{\xi_j}(t) = H_{v_j}(t)$ при всех t (см. работы [3] и [4]).

Поэтому

$$x_{kj}(t) = \int_0^{\infty} a_{kj}(\tau)\, d\xi_j(t-\tau),$$

$$x_k(t) = \sum_{j=1}^{q} \int_0^{\infty} a_{kj}(\tau)\, d\xi_j(t-\tau).$$

Однозначность $\xi_j(t)$ с точностью до унитарных преобразований $\xi_j' = \sum_k a_{jk}\,\xi_k$ вытекает из соответствующей однозначности компонент u_j.

Как легко понять, $H_\xi(t) = H_x(t)$ и $S_x = \bigcap_t H_\xi(t) = 0$, т. е. процесс $x(t)$ регулярен.

Обратно, пусть процесс $x(t)$ регулярен, т. е. $S_x = 0$. Тогда по лемме 1 процесс $\widetilde{x}(m)$ не сингулярен и

$$\widetilde{x}(m) = \widetilde{r}(m) \oplus \widetilde{s}(m).$$

Этому соответствует

$$x(t) = r(t) \oplus s(t).$$

В силу леммы 1 процесс $s(t)$ сингулярен, так как $\widetilde{s}(m)$ сингулярен. Но $\widetilde{s}(m)$ подчинен $\widetilde{x}(m)$, поэтому $s(t)$ подчинен $x(t)$, или

$$H_s(t) \subseteq H_x(t),\ S_s \subseteq S_x = 0,\ H_s = S_s = 0,\ s(t) = 0,\ \widetilde{s}(m) = 0.$$

Итак, $x(t)$ и $\widetilde{x}(m)$ одновременно регулярны и мы можем воспользоваться условиями регулярности процесса $\widetilde{x}(m)$, которые уже известны (см. обзорную статью Розанова [5] и работу Винера и Мазани [6]).

Наши теоремы 3, 4 легко следуют, например, из теорем 11, 14 работы [5] путем замены переменной $\lambda = 2\operatorname{arc\,tg}\mu$.

Поступила в редакцию
25. 5. 58

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве, Бюлл. МГУ, 2, № 6 (1941), 1—40.
[2] В. Н. Засухин, К теории многомерных стационарных случайных процессов, ДАН СССР, 33 (1941), 435—437.
[3] М. Г. Крейн, Об одной экстраполяционной проблеме А. Н. Колмогорова, ДАН СССР, 46 (1944), 306—309.
[4] J. L. Doob, Stochastic processes, New York (1953).
[5] Ю. А. Розанов, Спектральная теория многомерных стационарных случайных процессов с дискретным временем, Успехи матем. наук, XIII, 2 (1958), 93—142.
[6] N. Wiener et P. Masani, Acta Math., 98 (1957), 111—150.

ON MULTI-DIMENSIONAL STATIONARY RANDOM PROCESSES

E. G. GLADISHEV (MOSCOW)

(*Summary*)

The necessary and sufficient conditions for the regularity as well as for «the maximum regularity» of n-dimensional stationary random processes $(x_1(t), x_2(t), \ldots, x(t)$ with continuous time are obtained.

Wald's development «for the process» is also proved.

УПРОЩЕННЫЙ МЕТОД ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ОЦЕНКИ ЭНТРОПИИ СТАЦИОНАРНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Р. Л. ДОБРУШИН

Рассмотрим последовательность независимых величин $\ldots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi, \ldots$, принимающих каждая значение $E_1, \ldots, E_m$ с вероятностями

$$p_i = \mathbf{P}\{\xi_j = E_i\},\ i = 1, \ldots, m. \tag{1}$$

Как известно (см. [1]), энтропией этой последовательности называют число

$$H = \sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i. \tag{2}$$

В связи с фундаментальной важностью понятия энтропии для теории информации в последнее время довольно много занимаются вычислением энтропии эмпирически или экспериментально заданных последовательностей (например, последовательности букв или наборов по k букв реального языка, последовательностей значений яркости изображения,

подлежащего телевизионной передаче и т. п.). Эти вычисления основаны обычно на том, что по эмпирически заданной выборке $(x_1, \ldots, x_N)$ достаточно большой длины N оценивают при помощи частот вероятности p_i, а затем проводят вычисления по формуле (2). Описанный метод оказывается очень трудоемким, если число значений величины m велико, так как при этом большая часть вероятностей p_i мала, и для определения каждой из них требуется большой отрезок N и, следовательно, большая работа.

Однако естественно ожидать, что в принципе задача о вычислении единой характеристики H распределена $(p_1, \ldots, p_m)$ проще, чем задача о вычислении m-мерного вектора $(p_1, \ldots, p_m)$ и что решение проблемы нужно искать поэтому на пути, не использующем сведение первой более простой задачи ко второй более сложной. В настоящей заметке мы предлагаем вниманию читателя один из возможных методов непосредственной оценки энтропии H последовательности независимых случайных величин. В конце заметки обсуждается вопрос о применимости предлагаемого метода к произвольной стационарной последовательности.

Рассмотрим случайную величину η_i, равную наименьшему положительному k, для которого $\xi_k = \xi_0$ (т. е. η — время до следующего появления того же значения, что и в момент 0). Тогда очевидно, что условная вероятность

$$\mathbf{P}\{\eta > j \mid \xi_0 = E_l\} = (1 - p_l)^j. \tag{3}$$

Если вероятность p_l мала, то геометрическое распределение (3) будет близко к экспоненциальному, так что

$$\mathbf{P}\{\eta > x \mid \xi_0 = E_l\} \approx \exp\{-xp_l\}. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь случайную величину $\log \eta_i$. Используя (4), видим, что условное математическое ожидание

$$\mathbf{M}\{\log \eta \mid \xi_0 = E_l\} \approx p_l \int_0^\infty \log x \exp\{-xp_l\}\, dx =$$

$$= \int_0^\infty \lg y \exp\{-y\}\, dy - \log p_l = -C - \log p_l, \tag{5}$$

где $C = 0{,}577\ldots$ — постоянная Эйлера. Из формулы (5) следует, что, если все вероятности p_l малы, то безусловное математическое ожидание

$$\mathbf{M}\{\log \eta\} \approx H - C. \tag{6}$$

В связи со сказанным выше можно предложить следующий метод экспериментального определения энтропии. На основе выборки нужно получить некоторое число M независимых наблюдений $y_j\ (j = 1, \ldots, M)$ величины η_i (строго говоря, для этого надо строить каждое из y_j по отдельному, не пересекающемуся с другими, отрезку выборки. Однако если все p_i малы, то, по-видимому, зависимость между y_j будет невелика даже, если взять в качестве y_j расстояние между j-ым членом последовательности и следующим появлением того же значения, что, конечно, проще). Если M велико, то по закону больших чисел

$$\frac{\log y_1 + \log y_2 + \ldots + \log y_M}{n} + C \approx H, \tag{7}$$

и левая часть формулы (7) служит искомой оценкой для энтропии. Количество слагаемых M, которое нужно взять в (7) для оценки энтропии с заданной точностью, можно вычислить по наблюденным значениям $y_1, \ldots, y_M$, используя обычные способы оценки среднего значения случайной величины с неизвестной функцией распределения.

Нетрудно было бы, конечно, уточнить количественно введенное нами требование малости на вероятности, оценив для этого точно разность

$$\mathbf{M}\{\log \eta \mid \xi_0 = E_l\} + \log p_l + C = \sum_{j=1}^{\infty} \log j\,(1 - p_l)^j + \log p_l + C.$$

Мы, однако, не будем проводить этих оценок. Если среди вероятностей p_l имеются как малые, так и относительно большие, то нужно, выбрав подходящим образом $\varepsilon > 0$, разбить все значения на два подмножества: исходы A, для которых $p_l > \varepsilon$, и исходы B, для которых $p_l \leqslant \varepsilon$. Для $E_l \in A$ (таких значений не больше $1/\varepsilon$) надо вычислить вероятность p_l обычным методом на основе частот и затем положить

$$\widetilde{\eta}_i = \begin{cases} \log \eta_i, & \text{если } \xi_0 \notin A \\ -\log p_l, & \text{если } \xi_0 \in A,\ \xi_0 = E_l. \end{cases}$$

Тогда

$$\mathbf{M} \log \widetilde{\eta}_i \approx H - C$$

и вновь применимы развитые выше соображения.

Рассмотрим теперь произвольную стационарную последовательность величин $\ldots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \ldots$. Положим

$$H_n = -\sum_{i_1, \ldots, i_n} p_{i_1, \ldots, i_n} \log p_{i_1, \ldots, i_n},$$

где

$$p_{i_1, \ldots, i_n} = \mathbf{P}\{(\xi_{j+1}, \ldots, \xi_{j+n}) = (E_{i_1}, \ldots, E_{i_n})\}.$$

Энтропией последовательности ξ_i на единицу времени называют

$$\lim_{n \to \infty} \frac{H_n}{n} = \overline{H}.$$

Для ее приблизительного вычисления достаточно вычислить H_n при достаточно большом n. Положив $\widetilde{\xi}_j = (\xi_{j+1}, \ldots, \xi_{j+n})$, мы получим новую стационарную последовательность величин, принимающих n^m значений, для которой $\widetilde{H}_1 = H_n$. Таким образом, задача определения энтропии произвольной последовательности сводится к определению величины H_1, задаваемой тем же выражением (2), что и энтропия в случае независимых ξ_i. Заметим теперь, что в проводимых выше построениях мы использовали не сам факт независимости ξ_i, а лишь вытекающую из этого факта формулу (4) для распределения времени между последовательными появлениями одного и того же значения. Есть основания надеяться, что для малых p_l формула (4) дает хорошее приближение к истинному распределению η_i для достаточно широкого класса зависимых величин. Если, наконец, прямое использование оценки (7) невозможно, то иногда можно на основе данной последовательности ξ_i построить новую последовательность величин, являющихся практически независимыми, с теми же вероятностями p_i. Это можно сделать, взяв, например, последовательность $\xi_0, \xi_M, \xi_{2M}, \ldots$, где M — достаточно велико, или расставив члены последовательности $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ в новом случайном порядке.

Поступила в редакцию
5. 5. 58

ЛИТЕРАТУРА

[1] C. E. Shannon, The Mathematical Theory of Communication, Bell. Syst. Tech. Journ. **27** (1948), 379—423, 623—656. Русск. пер. (неполн.) в сборн. «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех», Изд-во иностр. лит., М., 1953, 7—87.

A SIMPLIFIED METHOD OF EXPERIMENTALLY EVALUATING THE ENTROPY OF A STATIONARY SEQUENCE

R. L. DOBRUSHIN *(MOSCOW)*

(*Summary*)

In this paper we relate a new method for evaluating the entropy of a stationary sequence using a given sample. This method is simpler than the one usually used.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ ВЫБОР МЕЖДУ ДВУМЯ РЕШЕНИЯМИ ДЛЯ ПРОЦЕССА ПУАССОНА

В. С. МИХАЛЕВИЧ

Настоящая заметка примыкает к работе [1]. Доказывается, что байесовские решения для процесса Пуассона при монотонной весовой характеристике и произвольном априорном распределении параметра процесса имеют такую же геометрическую структуру (кроме свойства урезанности) как и при ограничениях, сделанных в [1].

Все используемые далее обозначения и определения введены в [1], и ссылаясь на теорему или формулу с двойным порядковым номером, мы имеем в виду соответствующую теорему или формулу этой работы.

Теорема 1. *Пусть неубывающая весовая характеристика* $W(\lambda)$ *и априорное распределение* $\Phi(\lambda)$ *удовлетворяют условию* A: *при всех* $k = 0,1, \ldots$ *и всех достаточно малых* $\delta > 0$ *существует* $\int_0^\infty W(\lambda)\, d\,\Phi_{k,\delta}(\lambda)$, *где* $\Phi_{k,\delta}(\lambda)$ — *апостериорное распределение* (4.5). *Тогда существует байесовское решение* $\hat{R} = [\hat{\tau}, \hat{d}]$ *относительно* $\{W, \Phi, c\}$, *такое, что* $\hat{R}$ *при* $\hat{\tau}\,[x(t)] > 0$ *определяется блужданием траектории процесса* $x(t)$ *между двумя неубывающими целочисленно-ступенчатыми кривыми* $a(t)$ *и* $b(t)$ $(a(t) \leqslant b(t))$ *до первого достижения или пересечения одной из них, с приемом* d_1 *при* $x(t) \leqslant a(t)$ *и* d_2 *при* $x(t) \geqslant b(t)$.

Доказательство теоремы осуществляется с помощью описания структуры урезанных по $\hat{\tau}$ байесовских решений, для которых, в основном, сохраняют силу рассуждения из [1], и последующего предельного перехода при устремлении границы урезания T к $+\infty$. Соотношение (3), устанавливающее связь между урезанными и неурезанными решениями, существенно уточняет неравенство (19. sec. 9.3) из [2], особенно для неограниченных функций убытка, для которых (19. sec. 9.9) не имеет смысла. Заметим, что попутно мы выясняем и структуру байесовских решений для экспоненциальных семейств (2.2).

Приведем вначале обобщение основной леммы из [1] для экспоненциальных семейств при независимых испытаниях.

Лемма 1. *Пусть весовая характеристика* $W(\omega)$ *и априорная мера* $\xi(d\omega)$ *удовлетворяют условиям* а), в) *и первой части условия* г) *основной леммы* [1]. *Тогда* ν *(до* N*)-урезанные байесовские решения при каждом целом* N *удовлетворяют утверждению* 2) *основной леммы.*

Действительно, так как случай, когда $W(\omega) = \text{const} = \alpha$ на множестве единичной ξ-меры, тривиален (прием без испытаний d_1 (d_2) при $\alpha > 0$ (соответственно $(\alpha < 0)$), то достаточно считать, что $W(\omega)$ строго возрастает на множестве положительной ξ-меры: но тогда имеют место леммы 2.1 и 2.2, а следовательно, проходит вторая часть доказательства основной леммы, использующая только эти леммы и урезанность решений по ν.

Возвращаясь к процессу Пуассона, будем, не ограничивая общности, считать выполненным условие B: $W(\lambda)$ — неубывающая функция, принимающая на множестве положительной Φ-меры значения разных знаков, т. е. существуют Λ_1 и Λ_2 такие, что $W(\lambda) < 0$ при $\lambda \in \Lambda_1$ и $W(\lambda) > 0$ при $\lambda \in \Lambda_2$, причем $\int_{\Lambda_i} d\Phi(\lambda) > 0$, $i = 1,2$.

Несложной оценкой функции $q(x, t) = \int_0^\infty W(\lambda)\, d\,\Phi_{x,t}(\lambda)$ можно обнаружить, что при выполнении условий A и B функция $q(x, t)$ при каждом фиксированном x и достаточно большом, но конечном t — отрицательна, а при каждом фиксированном t и достаточно большом, но конечном x — положительна. Отсюда вытекает, что «разделяющая кривая», определяемая уравнением $q(y(t), t) = 0$, не только монотонно не убывает, но и не имеет горизонтальных и вертикальных асимптот.

Определение. Обозначим $\widetilde{\mathfrak{R}}_T$ множество таких решающих функций из $\widetilde{\mathfrak{R}}$, для которых $\tau\,[x(t)] \leqslant T$ при $x(t) \in \mathfrak{X}$. Назовем τ (до T)-урезанным байесовским реше-

нием относительно $\{W, c, \Phi\}$ такую решающую функцию $\hat{R}_T$ из $\widetilde{\mathfrak{R}}_T$, что для всякой другой $R \in \widetilde{\mathfrak{R}}_T$ будет $u[\hat{R}_T] \leqslant u[R]$.

Лемма 2. *Если выполнено условие* B, *а* T — *таково, что* $q(k, t)$ *существует при всех целых* $k \geqslant 0$ *и всех* $0 < t < T$, *то существует* τ *(до* T*)-урезанное байесовское решение относительно* $\{W, c, \Phi\}$ *таксе, что при* $\hat{\tau}[x(t)] > 0$ $\hat{R}_T$ *определяется двумя ограниченными неубывающими целочисленно-ступенчатыми кривыми* $a_T(t)$ *и* $b_T(t)$ *способом, аналогичным определению* $\hat{R}$ *по* $a(t)$ *и* $b(t)$ *в теореме* 1.

Доказательство леммы проводим по следующему плану. Вначале для каждого $\Delta \in T^{(2)}$, $\Delta > 0$ определим множество решающих функций $\mathfrak{R}_T^{\Delta}$ как пересечение $\mathfrak{R}^{\Delta}$ и $\widetilde{\mathfrak{R}}_T$. Затем строим решающую функцию $\hat{R}_{\Delta,T}$ такую, что $u[\hat{R}_{\Delta,T}] \leqslant u[R]$ при всех $R \in \mathfrak{R}_T^{\Delta}$. Так как без ограничения общности можно считать $\hat{\tau}_{\Delta,T}[x(t)] > 0$, то по лемме 1 функция $\hat{R}_{\Delta,T}$ определяется двумя последовательностями чисел

$$\left\{a_T^{\Delta}(i\Delta)\right\}, \quad \left\{b_T^{\Delta}(i, \Delta)\right\}, \quad j = 0,1, \ldots, \quad m(\Delta, T) \tag{1}$$

способом, аналогичным определению $\hat{R}_{\Delta}$ в [1] по (4.4). Устремляя теперь $\Delta(s) = \frac{1}{2^s}$ к нулю и используя включение $\mathfrak{R}^{\Delta(s)} \subset \mathfrak{R}^{\Delta(s+1)}$, обнаруживаем существование кривых $\bar{a}_T(t) \leqslant \bar{b}_T(t)$, определенных на $T^{(2)}$, являющихся предельными для (1), а, значит, — неубывающими и целочисленно-ступенчатыми. Используя же факт отсутствия вертикальных асимптот у разделяющей кривой $y(t)$, находим, что $\bar{b}_T(t) \leqslant y(T) + 1$, так как при каждом $\Delta > 0$ внутренняя для $\hat{R}_{\Delta,T}$ точка (k_0, t_0) с максимальной (среди других внутренних точек) абсциссой может появиться только при условии $k_0 < y(t_0)$, если $t_0 > t_{k_0}$, или же $t_0 < t_{k_0} < t_0 + \Delta$, если $k_0 > y(t_0)$. В самом деле, это условие есть следствие вытекающей из (1.14) рекуррентной формулы

$$\rho_1^{s,T}(k, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^{s,T}(k+i, \; t + \Delta(s)) \int_0^{\infty} \frac{(\lambda\Delta(s))^i}{i!} \, d\Phi_{k,F}(\lambda) + c\Delta(s), \tag{2}$$

где $\rho_1^{s,T}$ — риск по $\mathfrak{R}_T^{\Delta}$ продолжения испытаний при условии $\{x(t) = k\}$, а $\rho^{s,t}(k, t) = \min\{\rho_0(k, t), \rho_1^{s,T}(k, t)\}$.

Ввиду ограниченности $b_T(t)$ на $[0, T] \cap T^{(2)}$, убеждаемся, что $\bar{a}(t)$ и $\bar{b}(t)$ однозначно определяют две кривые $a_T(t)$, $b_T(t)$ на отрезке $[0, T]$, которые мы и принимаем за границы функции $\hat{R}_T$. Одновременно обнаруживаем, что соответствующее множество внутренних точек

$$V_s(T) = \{(k, t) : \rho_1^T(k, t) = \lim_{s \to \infty} \rho_1^{s,T}(k, t) < \rho_0(k, t)\}$$

состоит из конечного числа интервалов

$$J_k(T) = \{(k, t); \; t_k^-(T) < t < t_k^+(T)\}, \quad k = 0,1, \ldots, k_0(T),$$

причем

$$t_k^-(T) \leqslant t_{k+1}^-(T), \quad t_k^+(T) \leqslant t_{k+1}^+(T).$$

Теперь, воспользовавшись тем, что $V_s(T)$ заключено в прямоугольнике $\{0 \leqslant t \leqslant T, \; 0 \leqslant k \leqslant y_0(T) + 1\}$, убеждаемся в регулярности $\hat{R}_T$ и в том, что $u[\hat{R}_T] \leqslant u[R]$ при всех $R \in \widetilde{\mathfrak{R}}_T$, с помощью рассуждений, подобных приведенным для $\hat{R}$ в теореме 4.1. Лемма доказана.

В дальнейшем, не ограничивая общности, полагаем

$$W(\lambda, d_1) = 0, \qquad W(\lambda, d_2) = -W(\lambda) \quad \text{при } W(\lambda) < 0$$
$$W(\lambda, d_1) = W(\lambda), \quad W(\lambda, d_2) = 0 \qquad \text{при } W(\lambda) \geqslant 0.$$

Искомую решающую функцию $\hat{R}$ будем строить как предел урезанных решений $\hat{R}_T$ при $T \to +\infty$. Так как $\rho_1^T(k, t)$ монотонно не возрастает по T (ввиду $\widetilde{\mathfrak{R}}_{T_1} \supset \widetilde{\mathfrak{R}}_{T_2}$ при $T_2 \geqslant T_1$), то $t_k^-(T)$ не возрастает по T при каждом $k \geqslant 0$, а $t_k^+(T)$ не убывает по T (соответственно: $b_T(t)$ не убывает при фиксированном t, а $a_T(t)$ не возрастает по T). Обозначив через V предельное множество «внутренних точек»

$$V_S(T) = \{(k, t) : \rho_1^T(k, t) = \lim_{T \to \infty} \rho_1^T(k, t) < \rho_0(k, t)\},$$

заключаем, что оно состоит из интервалов $I_k = \{(k, t) : t_k^- < t_k^+\}$, возможно, в бесконечном числе, где $t_k^- = \lim_{T \to \infty} t_k^-(T)$, $t_k^+ = \lim_{T \to \infty} t_k^+(T)$. Таким образом, границы $a(t) = \lim_{T \to \infty} a_T(t)$ и $b(t) = \lim_{T \to \infty} b_T(T)$ множества V — неубывающие целочисленно-ступенчатые кривые. Определим решающую функцию $\hat{R}$ с помощью блуждания $x(t)$ между $a(t)$ и $b(t)$ согласно формулировке теоремы 1. Покажем, что $\hat{R}$ есть байесовское решение. Так как $\mathfrak{R}_{T_1} \subset \mathfrak{R}_{T_2}$ при $T_1 < T_2$, то $u[\hat{R}_{T_1}] \leqslant u[\hat{R}_{T_2}]$, а значит существует $\lim_{T \to \infty} u[\hat{R}_T] = u_0$. Убедимся, что $u[\hat{R}] = u_0$.

Лемма 3. *В условиях теоремы* 1

$$u[\hat{R}_T] \leqslant u[\hat{R}]\left(1 + \frac{\rho_0(T)}{cT}\right), \tag{3}$$

где $\rho_0(T) = \max_{k=0,1,\ldots} \rho_0(k, t)$, c *— стоимость проверки процесса за единицу времени.*

Доказательство. Построим по $\hat{R} = [\hat{\tau}, \hat{d}]$ новую решающую функцию ${}_T\hat{R} = [{}_T\hat{\tau}, {}_T\hat{d}]$, образованную оптимальным урезанием функции $\hat{R}$ в момент времени $t = T$: пусть

$$\mathfrak{X}_T = \{x(t) : \hat{\tau}[x(t)] < T\}, \qquad \mathfrak{X}_T = \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{X}_T;$$

положим

$$\left.\begin{aligned} {}_T\hat{\tau}[x(t)] &= \hat{\tau}[x(t)] \\ {}_T\hat{d}[x(t)] &= \hat{d}[x(t)] \end{aligned}\right\} \text{ при } x(t) \in \mathfrak{X}_T,$$
$$\left.\begin{aligned} {}_T\hat{\tau}[x(t)] &= T \\ {}_T\hat{d}\ x(t)] &= d^{x(T)} \end{aligned}\right\} \text{ при } x(t) \in \overline{\mathfrak{X}}_T, \tag{4}$$

где $d^k = d_1$, если $k < y(T)$, и $d^k = d_2$, если $k \geqslant y(T)$. Так как $u[\hat{R}_T] \leqslant u[{}_T\hat{R}]$, то достаточно доказать, что

$$u[{}_T\hat{R}] \leqslant u[\hat{R}]\left(1 + \frac{\rho_0(T)}{cT}\right).$$

В силу неотрицательности $W(\lambda, d)$ получим

$$u[R] = \int_0^\infty \int_{\mathfrak{X}} \{W(\lambda, \hat{d}[x(t)]) + c\hat{\tau}[x(t)]\} F_\lambda^*(cx(t))\, d\Phi(\lambda) =$$

$$= \int_0^\infty \int_{\mathfrak{X}_T} + \int_0^\infty \int_{\mathfrak{X}_T} \geqslant cT \int_0^\infty \int_{\mathfrak{X}} F_\lambda^*(dx(t))\, d\Phi(\lambda), \tag{5}$$

$$u[{}_T\hat{R}] = \int_0^\infty \int_{\bar{\mathfrak{X}}_T} \{W(\lambda, \hat{d}[x(t)]) + c\hat{\tau}[x(t)]\} F_\lambda^*(dx(t))\, d\Phi(\lambda) +$$

$$+ \int_0^\infty \int_{\bar{\mathfrak{X}}_T} \{W(\lambda, {}_T\hat{d}[x(t)]) + cT\} F_\lambda^*(dx(t))\, d\Phi(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant u[\hat{R}] + \int_0^\infty \int_{\bar{\mathfrak{X}}_T} W(\lambda, {}_T\hat{d}[x(t)])\, F_\lambda^*(dx(t))\, d\Phi(\lambda). \qquad (6)$$

Обозначив $\bar{\mathfrak{X}}_T(k) = \{x(t) \in \bar{\mathfrak{X}}_T;\ x(T) = k\}$, представим второе слагаемое в (6) в виде

$$\sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty \int_{\bar{\mathfrak{X}}_T(k)} W(\lambda, d^k) F_k^*(dx(t))\, d\Phi(\lambda) = \sum_{k=0}^\infty S_k. \qquad (7)$$

Учтем теперь, что $\hat{\tau}$ и $\hat{d}$ для $\hat{R}$ определяется посредством блуждания между $a(t)$ и $b(t)$, зависящим в каждый момент t только от достаточной статистики — значения процесса $x(t)$ в этот момент времени. А именно, обозначим $t_1, \ldots, t_{s-1}$ совокупность точек роста кривых $a(t)$ и $b(t)$, $t_s = T$, $t_0 = 0$, $u_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, s$. Пусть, далее, $\{k_i,\ i = 1, 2, \ldots, s\}$ — произвольная последовательность неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^s k_i = k$, $a(t_i) < k_i \leqslant \min\{k, b(t_i)\}$, а C_k — совокупность всех таких последовательностей. Легко тогда подсчитать, что интеграл $\int_{\bar{\mathfrak{X}}_T(k)} F_\lambda^*(dx(t))$, равный вероятности события

$$\{a(t) < x(t) < b(t) \text{ при } t < T,\ x(T) = k\},$$

где $x(t)$ — траектория процесса Пуассона с параметром λ, может быть представлен в виде

$$\sum_{\{k_i\} \in C_k} \prod_{i=1}^s \frac{(\lambda u_i)^{k_i} e^{-\lambda u_i}}{k_i!} = \lambda^k e^{-\lambda T} \sum_{C_k} \prod_{i=0}^s \frac{(u_i)^{k_i}}{k_i!}\, \psi(k, \lambda). \qquad (8)$$

Вспомнив, что $\rho_0(k, t) = \min_{i=1,2} \int_0^\infty W(\lambda, d_i)\, d\Phi_{k,t}(\lambda)$, умножим и разделим каждое S_k на $\int_0^\infty \psi_{k,\lambda}\, d\Phi(\lambda)$, тогда получим

$$\sum_{k=0}^\infty S_k = \sum_{k=0}^\infty \rho_0(k, T) \int_0^\infty \int_{\bar{\mathfrak{X}}_T(k)} F_\lambda^*(dx(t))\, d\Phi(\lambda) \leqslant \rho_0(T) \int_0^\infty \int_{\bar{\mathfrak{X}}_T} E_\lambda^*(dx(t))\, d\Phi(\lambda).$$

Вместе с (5) это приводит к искомому неравенству.

Нам понадобятся некоторые факты о байесовских решениях для экспоненциальных семейств (2.2).

Лемма 4. *Пусть ω_0 — некоторый нуль функции $W(\omega)$, которая вместе с априорной мерой $\xi(d\omega)$ удовлетворяет условиям* а), в) и г) *основной леммы* [1]. *Тогда при $n \geqslant n_0$ функция $\rho_0(n) = \max_v \rho_0(v, n)$ равномерно ограничена.*

Доказательство леммы можно провести путем несложной модификации цепочки неравенств (2.9).

Лемма 5. *Если выполнены условия предыдущей леммы, то байесовские решения для (2.2) удовлетворяют утверждению* 2) *основной леммы, где возможно и $M = +\infty$.*

Доказательство. Изучим соответствующее множество внутренних точек $V = \{(v, n): \rho_1(v, n) < \rho_0(v, n)\}$. В силу леммы 1 замечаем, что множество внутренних

точек для урезанных решений $V_N = \{(v, n): \rho_1^N(v, n) < \rho_0(v, n)\}$ состоит из вертикальных интервалов $\sigma_n^N = (A_n^N < v < B_n^N)$; $n = 1, \ldots, N$, где v — допустимая для семейства 2.2 точка, $A_n^N = \sup_v \{v, \rho_1^N(v, n) \geqslant r_1(v, n)\}$, $B_n^N = \inf_v \{v, \rho_1^N(v, n) \geqslant r_2(v, n)\}$, σ_n^N пуст, если $B_n^N < A_n^N$.

Очевидно, A_n^N не возрастает по N при фиксированном n, а B_n^N не убывает. Пусть

$$A_n = \lim_{N \to \infty} A_n^N, \quad B_n = \lim_{N \to \infty} B_n^N,$$

$\widetilde{V}$ — соответствующее предельное множество для V_N, состоящее из интервалов $\sigma_n = (A_n, B_n)$. Покажем, что $\widetilde{V}$ определяет решающую функцию $\widetilde{R}$ — байесовское решение. Пусть $\hat{R}$ — некоторое байесовское решение относительно $\{W, c, \xi\}$. Согласно следствиям 1.1. и 1.2 и соображениям о достаточной статистике семейства 2.2 оно определяется блужданием точки (v, n) (для почти всех v) при $n = 1, 2, \ldots$ внутри множества V. Однако имеет место

Лемма 6. *В условиях леммы 4 при каждом* $N = 1, 2, \ldots$ *будет*

$$u_\xi[\hat{R}_N] \leqslant u_\xi[\hat{R}] \left(1 + \frac{\rho_0(N)}{cN}\right),$$

где

$$\rho_0(N) = \max_v \rho_0(v, N).$$

Доказательство этой леммы проводится по схеме доказательства леммы 3.

Таким образом ввиду леммы 4 $\lim_{N \to \infty} u_\xi[\hat{R}_N] = u_\xi[\hat{R}]$.

С другой стороны, для решающей функции $\widetilde{R}$, определенной, по $\widetilde{V}$ блужданием точки (v, n) с приемом первого решения, если при выходе $\rho_0(v, n) = r_1(v, n)$, и второго, если при выходе $\rho_0(v, n) = r_2(v, n)$, также справедливо неравенство

$$u_\xi[\widetilde{R}_N] \leqslant u_\xi[\widetilde{R}] \left(1 + \frac{\rho_0(N)}{cN}\right).$$

Но так как $u_\xi[\widetilde{R}_N] \geqslant u_\xi[\hat{R}]$, а $u_\xi[\hat{R}_N]$, то отсюда следует, что $u_\xi[\widetilde{R}] = \lim_{N \to \infty} u_\xi[\hat{R}_N]$, т. е. ввиду $\lim_{N \to \infty} u_\xi[R_N] = u_\xi[\hat{R}]$, R есть байесовское решение относительно $\{W, c, \xi\}$.

Теперь мы можем окончить доказательство теоремы 1. Из леммы 5 находим, что для каждого $\Delta > 0$ существует решающая функция $\hat{R_\Delta} \in \mathfrak{R}_\Delta$ такая, что $u[\hat{R_\Delta}] \leqslant u[R_\Delta]$ при всех $R_\Delta \in \mathfrak{R}_\Delta$, причем $\lim_{T \to \infty} u[R_{\Delta,T}] = u[R_\Delta]$. Но так как $u[\hat{R}_T] \leqslant u[\hat{R}_{\Delta,T}]$ при каждых $T > 0$, $\Delta > 0$, то $u[\hat{R}] = \lim_{T \to \infty} u[\hat{R}_T] \leqslant u[\hat{R}_\Delta]$. Пусть теперь существует $R' \in \widetilde{\mathfrak{R}}$ такая, что $u[R'] < u[\hat{R}]$. Из $R \in \mathfrak{R}$ вытекает существование последовательности решающих функций $\{R_{\Delta_i}\}$, $i = 1, \ldots$; $\Delta_i \in T^{(2)}$, для которой $u[R'] \geqslant u[R_{\Delta_i}] - \varepsilon$, начиная с некоторого $i = i_0(\varepsilon)$. Но $u[\hat{R_{\Delta_i}}] \leqslant u[R_{\Delta_i}]$, так что $u[R'] \geqslant u[\hat{R}] - \varepsilon$, что приводит к противоречию, ввиду произвольности достаточно малого числа ε. Теорема доказана.

Поступила в редакцию
4.1.58.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. С. Михалевич, Последовательные байесовские решения и оптимальные методы приемочного статистического контроля. Теория вероятн. и ее примен., I, 4 (1956), 437—465.

[2] D. Blackwell, M. A. Girshick, Theory of games and statistical decisions, New York, 1954.

SEQUENTIAL SELECTION BETWEEN TWO SOLUTIONS FOR A POISSON PROCESS

V. S. MIHALEVICH (*KIEV*)

(Summary)

In this jajer the results of theorem 4.1 in [1] are extended to arbitrary a priori distributions.

О РАВНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ БИНОМИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕОГРАНИЧЕННО ДЕЛИМЫМИ ЗАКОНАМИ

И. П. ЦАРЕГРАДСКИЙ

1°. Рассмотрим:

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{1}$$

— последовательность взаимно-независимых случайных величин, подчиненных одному и тому же закону распределения $F(x)$.

Положим

$$s_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n \tag{2}$$

$$F^n(x) = \mathbf{P}\{s_n < x\}. \tag{3}$$

Обозначим через $\mathfrak{G}$ совокупность неограниченно-делимых распределений. Определим расстояние $\rho(H, G)$ между функциями распределения $H(x)$ и $G(x)$, полагая

$$\rho(H, G) = \sup_{-\infty<x<\infty} |H(x) - G(x)|,$$

и обозначим расстояние между F^n и $\mathfrak{G}$ через $\psi(n; F)$, т. е.

$$\psi(n; F) = \inf_{G \in \mathfrak{G}} \rho(F^n, G). \tag{4}$$

Как недавно установлено А. Н. Колмогоровым [1], существует „универсальная" оценка скорости сближения „степеней" функции распределения F со множеством неограниченно делимых распределений $\mathfrak{G}$, а именно

$$\sup_F \psi(n; F) \leqslant C \cdot n^{-1/3}, \tag{5}$$

где C — абсолютная постоянная.

Однако, по-видимому, этот результат нельзя считать окончательным.

Во всяком случае, в настоящей заметке доказывается, что для биномиального распределения оценка (5) может быть улучшена.

2°. Пусть каждое слагаемое суммы (2) имеет закон распределения $F_p(x)$ случайной величины, принимающей значения 1 и 0 с вероятностями, соответственно, p и $q = 1 - p$. Сумма $s_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ так распределенных слагаемых обычно интерпретируется числом успехов в n независимых испытаниях с вероятностью успеха p (схема Бернулли). Закон распределения этой суммы, как известно, имеет вид

$$F_p^n(x) = \sum_{0 \leqslant m < x} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}. \qquad (6)$$

В обозначениях пункта 1° справедлива следующая

Теорема 1. *Существует абсолютная постоянная C_0 такая, что*

$$\sup_{0 \leqslant p \leqslant 1} \psi(n; F_p) \leqslant C_0 \cdot n^{-1/2} \qquad (7)$$

(можно взять $C_0 = 12\sqrt{7}$).

Замечание. Почти очевидно, что при доказательстве теоремы 1 достаточно ограничиться случаем $0 < p \leqslant 1/2$.

Утверждение теоремы 1 вытекает как следствие из двух лемм, в первой из которых $H_p^n(x)$ означает пуассоновское распределение с параметром np:

$$H_p^n(x) = \sum_{0 \leqslant m < x} \frac{(np)^m}{m!} e^{-np}. \qquad (8)$$

Лемма 1. *При $0 < p \leqslant 1/2$*

$$\rho(F_p^n, H_p^n) \leqslant 3\frac{p}{q}.$$

Лемма 2. *При любом $0 < p \leqslant 1/2$ существует такой неограниченно-делимый закон $G_p^n(x)$, что*

$$\rho(F_p^n, G_p^n) \leqslant 84\frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

Эти леммы доказываются весьма близкими рассуждениями. Основную роль при этом играет

Теорема 2. *Если $f(t)$ и $g(t)$ — характеристические функции целочисленных случайных величин и*

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| dt$$

существует, то

$$\rho(F, G) \leqslant \frac{1}{4} I, \qquad (9)$$

где F и G — соответствующие функции распределения.

Доказательство теоремы 2. Исходя из явной формулы для функций распределения ([2], стр. 67) и полагая

$$x_2 = k_2 + \frac{1}{2}, \quad x_1 = k_1 + \frac{1}{2},$$

(k_1 и k_2 — целые числа, $k_2 > k_1$), получим

$$(F(x_2) - F(x_1)) - (G(x_2) - G(x_1)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - g(t)) \frac{e^{-itk_1} - e^{-itk_2}}{2i \sin\frac{t}{2}} dt.$$

Последний интеграл можно разбить в сумму двух интегралов так, что один из них будет при $k_1 \to -\infty$ стремиться к нулю, по теореме Римана—Лебега. Отсюда

$$F(x_2) - G(x_2) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t) - g(t)}{2 \sin\frac{t}{2}} e^{-ik_2 t} dt$$

и

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |F(x) - G(x)| = \sup_{x_2 = k_2 + \frac{1}{2}} |F(x_2) - G(x_2)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(t) - g(t)}{2 \sin\frac{t}{2}} \right| dt \leqslant \frac{1}{4} I.$$

(При выводе последнего неравенства мы воспользовались тем, что $|\sin\varphi| > \frac{2}{\pi}|\varphi|$ при $|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}$.)

3°. Доказательство леммы 1. Пусть

$$f_p(t) = q + pe^{it} \tag{10}$$

и

$$h_p(t) = e^{p(e^{it}-1)}. \tag{11}$$

Мы имеем

$$f_p^n - h_p^n = (f_p - h_p)(f_p^{n-1} + f_p^{n-2}h_p + \ldots + h_p^{n-1})$$

и

$$|f_p^n - h_p^n| \leqslant |f_p - h_p| \cdot n \cdot e_p^{n-1}, \tag{12}$$

где

$$e_p(t) = \max(|f_p(t)|, \quad |h_p(t)|).$$

Отметим теперь легко проверяемые неравенства

$$\text{(а)} \quad e^{\Lambda} = 1 + \Lambda + \frac{\theta}{2}|\Lambda|^2 e^{|\Lambda|}$$

(Λ — любое комплексное число, $|\theta| \leqslant 1$),

$$\text{(б)} \quad |e^{it} - 1| \leqslant \min(|t|, 2)$$

(t — вещественное число)

$$\text{(в)} \quad |f_p(t)| \leqslant e^{-2pq\sin^2\frac{t}{2}}, \tag{13}$$

$$\text{(г)} \quad |h_p(t)| = e^{-2p\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Из (в) и (г) при $|t| \leqslant \pi$ получаем

$$l_p(t) \leqslant e^{-\frac{2pq}{\pi^2}t^2}. \tag{14}$$

Для разности $f_p - h_p$, используя (а) и (б), находим оценку

$$|f_p(t) - h_p(t)| \leqslant \frac{1}{2}p^2t^2e^{2p}. \tag{15}$$

По теореме 2

$$\rho(F_p^n, H_p^n) \leqslant \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f_p^n(t) - h_p^n(t)}{t}\right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\cdot e^{2p}\cdot e^{2pq}\cdot 2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}p^2t\cdot ne^{-n\cdot\frac{2pq}{\pi^2}t^2}dt \leqslant e^{2p+2pq}\cdot\frac{\pi^2}{16}\cdot\frac{p}{q}.$$

При $p \leqslant \frac{1}{2}$ коэффициент при $\frac{p}{q}$ и не превосходит 3, ч. тр. д.

4°. Приведем теперь доказательство леммы 2.

Будем искать закон распределения из класса $\mathfrak{G}$, приближающий биномиальное распределение с требуемой точностью, в виде целочисленного закона, первые три семиинварианта которого γ_1^*, γ_2^*, γ_3^* совпадают с соответствующими семиинвариантами биномиального распределения:

$$\gamma_1^* = np, \quad \gamma_2^* = npq, \quad \gamma_3^* = npq(q-p). \tag{16}$$

Построение такого закона распределения опирается на следующую лемму:

Лемма 3. *Для любого* ε *из интервала*

$$I(p) = (-p^2q, \ pq^2)$$

найдется случайная величина η_ε, *принимающая значения*

$$i = -2, \ -1, \ 0, \ 1, \ 2. \tag{17}$$

с вероятностями q_j такими, что $\mathbf{M}\eta_\varepsilon = \varepsilon$ *и*

$$\mathbf{M}\eta_\varepsilon^2 = pq, \quad \mathbf{M}\eta_\varepsilon^3 = pq(q-p), \quad q_{-1} + q_1 \geqslant \frac{1}{3}pq. \tag{18}$$

Доказательство леммы 3. Распределения величин, принимающих значения (17), можно изображать точными

$$\vec{q} = (q_{-2}, q_{-1}, q_0, q_1, q_2)$$

пятимерного пространства. При этом распределения, удовлетворяющие (18), образуют непустое замкнутое и выпуклое множество Q в этом пространстве.

Точки

$$\vec{q_1} = \left(0,\ pq - \frac{2}{3}pq^2,\ 1 - pq + \frac{1}{2}pq^2,\ 0,\ \frac{1}{6}pq^2\right)$$

и

$$\vec{q_2} = \left(\frac{1}{6}p^2q,\ 0,\ 1 - pq + \frac{1}{2}p^2q,\ pq - \frac{2}{3}p^2q,\ 0\right),$$

как легко видеть, входят в Q. На отрезке

$$\vec{q} = t\vec{q_1} + (1-t)\vec{q_2} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

соединяющем точки $\vec{q_1}$ и $\vec{q_2}$ и целиком лежащем в Q, функция

$$f(q) = \Sigma j q_j$$

принимает все значения между $f(q_1) = -p^2q$ и $f(q_2) = pq^2$, откуда и вытекает утверждение леммы 3. Отметим, кстати, что длина интервала $I(p)$ равна pq.

А. Построение закона $G_p^n(x)$. Очевидно, что можно сразу предположить

$$npq > 1. \tag{19}$$

В силу (19) найдется такое целое число k, что

$$\varepsilon = p - \frac{k}{n} \in I(p).$$

Пусть η_ε — случайная величина, существование которой утверждается леммой 3 и $\theta_{n,p}(t) = \mathbf{M}e^{it\eta_\varepsilon}$ — ее характеристическая функция. Целочисленное неограниченно-делимое распределение $G_p^n(x)$ с характеристической функцией

$$g_p^n(t) = \exp\{itk + n(\theta_{n,p}(t) - 1)\}$$

имеет три первых семиинварианта, равные соответственно

$$\gamma_1^* = k + n\varepsilon = np, \quad \gamma_2^* = npq, \quad \gamma_3^* = npq(q-p).$$

Заметим, что при первых семиинвариантах распределения с характеристической функцией $q_p(t)$ равны p, pq, $pq(q-p)$, а четвертый, будучи равен $\mathbf{M}\eta_\varepsilon^n$, не превосходит $4\mathbf{M}\eta_\varepsilon^2 = 4pq$. Отсюда вытекает, что три первых момента этого распределения равны p, а четвертый не превосходит ([2], стр. 71)

$$4pq + 3(pq)^2 + 4p \cdot pq(q-p) + 6p^2pq + p^4,$$

что, в силу неравенств $p \leqslant \frac{1}{2}$, $q < 1$, не превосходит $10\,p$.

В. Оценка разности $F_p^n - G_p^n$. Разлагая функции f_p и q_p в ряд Тейлора, получим

$$f_p(t) = 1 + ipt - \frac{1}{2}pt^2 - \frac{1}{6}ipt^3 + \frac{\theta'}{24}pt^4, \quad |\theta'| \leqslant 1$$

и

$$g_p(t) = 1 + ipt - \frac{1}{2}pt^2 - \frac{1}{6}ipt^3 + \frac{\theta''}{24}10pt^4, \quad |\theta''| \leqslant 1.$$

Следовательно,

$$|f_p(t) - g_p(t)| \leqslant \frac{1}{2} pt^4.$$

Далее

$$|g_p(t)| = \exp\{\Sigma q_j \cos jt - 1\} = \exp\left\{-2(q_{-2} + q_{+2})\sin^2 t - 2(q_{-1} + q_1)\sin^2\frac{t}{2}\right\}.$$

Учитывая (18) и неравенство

$$\left|\sin\frac{t}{2}\right| \geqslant \frac{|t|}{\pi} \quad \text{при } |t| \leqslant \pi,$$

находим оценку

$$|g_p(t)| \leqslant e^{-\frac{2}{3}pq\cdot\frac{1}{\pi^2}t^2} \quad \text{при } |t| \leqslant \pi.$$

Теперь те же выкладки, что и проделанные при доказательстве леммы 2, приводят к неравенствам

$$\rho(F_p^n, G_p^n) \leqslant \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f_p^n(t) - g_p^n(t)}{t}\right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\cdot e^{\frac{2pq}{3}}\cdot 2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\cdot pt^3\cdot n\cdot e^{-n\cdot\frac{2pqt^2}{3\pi^2}} dt \leqslant \frac{1}{4}\cdot e^{\frac{2pq}{3}}\cdot 2\cdot\frac{9\pi^4}{16npq^2} < \frac{84}{npq},$$

ч. тр. д.

Поступила в редакцию
6.7.58

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Две равномерные предельные теоремы для сумм независимых слагаемых, Теория вероят. и ее примен., I, вып. 4 (1956), 426—435.

[2] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Гос. изд. тех.-теор. лит., 1949.

ON A UNIFORM APPROXIMATION FOR A BINOMIAL DISTRIBUTION OF INFINITELY DIVISIBLE LAWS

I. P. TSAREGRADSKI (MOSCOW)

(*Summary*)

Let $F_p^n(x)$ be (n, p) — binomial distribution function and be the set of all infinitely divisible laws. We define

$$\rho(F_p^n, \mathfrak{G}) = \inf_{G\in\mathfrak{G}} \sup_x |F_p^n(x) - G(x)|.$$

Then,

$$\sup_{0\leqslant p\leqslant 1} \rho(F_p^n, \mathfrak{G}) < \frac{C_0}{\sqrt{n}},$$

where C_0 is an absolute constant.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том III И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 4
1958

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

У. Гренандер и М. Розенблатт. Статистический анализ стационарных временных рядов (Ulf Grenander and Murray Rosenblatt, Statistical Analysis of Stationary Time Series), New York: J. Wiley Sons; Stockholm: Aluqvist Wiksel 1957, стр. 300 (англ.).

Теория стационарных процессов за последние годы получила широкое развитие. В значительной степени это определяется тем, что многочисленные задачи радиотехники, физики, геофизики, автоматики и пр. приводят к рассмотрению вероятностных процессов, которые с достаточным основанием могут считаться стационарными.

Создание общей теории стационарных процессов связано с именами выдающихся советских ученых: Е. Е. Слуцкого, А. Я. Хинчина и А. Н. Колмогорова. В работах А. Я. Хинчина, тесно связанных с задачами статистической механики, были сформулированы понятия стационарности в узком и широком смысле, доказан закон больших чисел, найдено спектральное представление корреляционной функции, доказана и подробно исследована эргодическая теорема. Е. Е. Слуцкий, отправляясь от задач геофизики, внес существенный вклад в разработку начал статистики стационарных процессов и последовательностей. А. Н. Колмогоров обратил внимание на важные в общетеоретическом и прикладном отношениях задачи экстраполяции и интерполяции стационарных последовательностей, получил в этом направлении ряд законченных результатов и указал на тесные связи теории стационарных в широком смысле последовательностей с геометрией гильбертовского пространства. Далее им была разработана теория спектрального представления стационарных процессов и построена статистическая теория изотропной турбулентности на базе теории стационарных процессов. Дальнейшее развитие этого важного раздела теории вероятностей связано с именами Н. Винера, Г. Волда, В. Н. Засухина, М. Лоева, К. Карунена, Г. Крамера, М. Г. Крейна, А. М. Обухова, А. М. Яглома и др.

Систематическое развитие вопросов статистики стационарных последовательностей (рядов) и отчасти процессов, предпринятое авторами книги, связано в значительной степени с обилием запросов к такого рода исследованиям со стороны практиков и, несомненно, своевременно. Рецензируемая книга является первой попыткой в мировой литературе собрать воедино основные результаты, касающиеся статистики стационарных последовательностей. Давние попытки монографического описания анализа спектрограмм, естественно, не могут рассматриваться как монографии, посвященные статистике временных рядов. Они преследовали гораздо более узкие цели. Само собой разумеется, что личные научные интересы авторов книги сильно сказались на содержании книги. Их принципы, достаточно последовательно осуществленные в книге, состоят в том, что основное значение в современной статистике имеет построение доверительных областей, а не критериев, дающих ответы типа — да или нет. Отдавая должное теоретическому значению разработки критериев такого рода, они видят лишь ограниченную ценность их для практики.

В полном соответствии с наименованием книги, в ней почти нет статистических рекомендаций, касающихся стационарных процессов, и подавляющая часть книги посвящена исследованию временных рядов, т. е. стационарных последовательностей.

Для того чтобы у читателя сложилось достаточно определенное суждение о содержании книги, мы остановимся на кратких характеристиках отдельных глав.

Глава 1 «Стационарные вероятностные процессы и их представления» (40 стр.) содержит необходимые основы теории стационарных вероятностных процессов. В начале приведены общие определения вероятностных процессов, стационарных в узком и широком смысле. Далее устанавливается спектральное представление стационарного процесса и корреляционной функции, доказывается эргодическая теорема, изучается процесс скользящего суммирования и рассматриваются операции над стационарными процессами (искажение амплитуд, линейные операции, периодические наблюдения и др.). Изложение снабжено рассмотрением многих физических примеров, что значительно оживляет и облегчает чтение главы.

Глава 2 «Статистические задачи при известном спектре» (30 стр.) посвящена подробному изложению линейного прогнозирования в среднеквадратическом смысле стационарных последовательностей. Изложение строгое и удачное. Авторы следуют А. Н. Колмогорову в определении регулярных и нерегулярных процессов. Два небольших по размерам параграфа содержат краткое изложение интерполяции и фильтрации стационарных последовательностей. В конце главы рассматривается оценка коэффициентов регрессии в случае, когда спектр остатка временного ряда известен.

Глава 3 «Статистический анализ параметрических моделей» (26 стр.) содержит краткий обзор методов анализа конечно-параметрических схем: анализ периодограмм, метод переменных разностей для определения порядка полиномиальной регрессии, сглаживание временных рядов, распределение коэффициентов корреляции квадратичных форм, проверка схем авторегрессии и скользящего суммирования, оценка коэффициентов в авторегрессионных схемах.

Первые три главы по замыслу авторов книги должны служить введением в основное содержание.

В главе 4 «Оценка спектра» (41 стр.) рассматриваются вопросы эмпирической оценки спектральной плотности стационарных последовательностей и процессов по результатам наблюдений. В качестве оценки спектральной плотности стационарных последовательностей рассматривается квадратическая форма от наблюдений. Оценки, являющиеся линейными формами от сумм запаздывающих произведений наблюдений, авторы называют спектрограммными. Устанавливается, что спектрограммные оценки асимптотически так же хороши, как и общие квадратичные оценки. Изучаются асимптотические смещения и дисперсии спектрограммных оценок. Оказывается, что все хорошие оценки спектральной плотности являются смещенными. В качестве меры надежности оценки принимается средне-квадратическая ошибка. Значительная часть этой главы посвящена изучению некоторых конкретных оценок спектральной плотности (оценки Бартлетта, Тюкэ, прямоугольная и др.). Эта часть главы носит рецептурный характер. Один из параграфов этой главы посвящен оценке спектральной плотности нормального процесса.

Глава 5 «Приложения» (21 стр.) носит скорее иллюстративный характер и содержит описание измерения спектра случайных шумов (дробовой эффект, тепловой шум), а также некоторые вопросы теории турбулентности и образования океанских волн.

Глава 6 «Распределение оценок спектра» (47 стр.) содержит центральные результаты авторов по изучению асимптотического распределения наибольшего уклонения эмпирической спектральной функции от истинной. Результаты этой главы в значительной степени напоминают соответствующие выводы, относящиеся к критериям А. Н. Колмогорова и Н. В. Смирнова. Однако здесь предельное распределение не является столь универсальным, а существенно зависит от структуры исходного временного ряда. В случае нормальной последовательности предельное распределение зависит от одного параметра, и возможно построение доверительных областей для спектральной функции. В заключение главы приведен спектральный анализ некоторых искусственно построенных временных рядов.

В главе 7 «Задачи линейных оценок» (34 стр.) изложены важные исследования авторов по асимптотическому поведению средне-квадратических оценок коэффициентов регрессии. Условия асимптотической эффективности средне-квадратичных оценок удачно формулируются в терминах введенного авторами понятия элементов спектра регрессии. Сравниваются средне-квадратические и марковские (несмещенные с мини-

мальной дисперсией) оценки. Приведены условия, при которых средне-квадратическая оценка асимптотически лучше марковской. Подробно рассматриваются случаи полиномиальной и тригонометрической регрессии.

В заключительной главе 8 «Различные задачи» (18 стр.) рассматриваются вопросы прогнозирования в случае эмпирически определяемого спектра, нули и максимумы стационарных процессов, методы проверки гипотезы о нормальности стационарного процесса и другие задачи.

В книге имеется добавление по теории функций комплексного переменного, предназначенное для второй главы. В конце книги приведена 51 задача для упражнений и приложена библиография, содержащая свыше 100 наименований работ.

Не все главы книги написаны одинаково ровно. Главы, в которых излагаются результаты авторов, написаны с подъемом и подробно. В то же время гл. 3, носящая компилятивный характер, но очень важная для построения общей теории и практических применений, носит следы спешки. Прикладные иллюстрации, особенно в гл. 5, изложены лишь суммарно и, как правило, на них не показано практического использования развитой авторами общей теории.

Книга рассчитана на математически подготовленного читателя, владеющего основами теории вероятностей и математической статистики, например, в объеме книги Г. Крамера «Математические методы статистики». Значительная часть материала, изложенного в книге, может быть использована и специалистами, занимающимися прикладными вопросами статистики. Это особенно относится к некоторым вопросам глав 3, 4 и 6. К тому же глава 1 дает хорошее введение в теорию стационарных процессов.

Учитывая отсутствие подобных книг в советской литературе и большой интерес к статистике стационарных процессов, издание этой книги на русском языке мы считаем весьма целесообразным. Конечно, еще более целесообразным мы считаем написание специальной книги советскими авторами, тем более что для этого имеются все предпосылки.

Б. В. Гнеденко

Поправка к работе Р. Л. Добрушина **«Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова» ч. I, II (т. I, вып. 1 и 4).**

В. А. Статулявичус любезно указал автору следующие неточности, вкравшиеся в опубликованный текст работы:

1. В формулировке леммы 5 (равенство (4.2)) должен стоять символ max.

2. В неравенстве (6.9) должен стоять множитель $r(r+1)$.

Указанные поправки вносят очевидные изменения в дальнейшие использующие их оценки, не меняя однако хода рассуждений и окончательных выводов.

Р. Л. Добрушин

Поправка к работе Ю. В. Прохорова **«Усиленная устойчивость сумм и неограниченноделимые распределения» (т. III, вып. 2).**

На стр. 162 вместо $p_n = n^{-1}(\ln n)^{-1}(\ln\ln n)^{-2}$ должно быть $p_n = n^{-1}(\ln n)^{-1}(\ln\ln n)^{2}$.

СОДЕРЖАНИЕ ТРЕТЬЕГО ТОМА

Выпуск первый

Линник Ю. В. Общие теоремы о разложении безгранично делимых законов. I. Формулировки. Три основные леммы. Необходимые условия 3
Linnik Yu. V. General Theorems on the Factorization of Infinitely Divisible Laws 39
Дынкин Е. Б. Скачкообразные марковские процессы 41
Dynkin E. B. Markov Jump Processes 60
Takàcs L. On a Sojourn Time Problem 61
Такач Л. Задача о времени пребывания 69
Маслов К. В. и Повзнер А. Я. Об инфинитезимальных операторах одного класса марковских процессов 70
Maslov K. V. and Povzner A. I. On Infinitesimal Operators of a Class of Markov Processes 83
Цареградский И. П. Замечание о пропускной способности стационарного канала с конечной памятью 84
Tsaregradsky I. P. On the Capacity of Stationary Channel with Finite Impression 96

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Добрушин Р. Л. Условие непрерывности выборочных функций мартингала . . 97
Dobrushin R. L. The Continuity Condition for Sample Martingale Functions . . 98
Цзян Цзе-пей. Замечание об определении количества информации 99
Chiang Tse-pei. A Remark on Defining the Quantity of Information . . . 102
Ерохин В. ε-энтропия дискретного случайного объекта 103
Erohin V. ε-Entropy of a Discrete Random Variable 106
Рихтер В. Многомерные локальные предельные теоремы для больших уклонений 107
Richter W. Mehrdimensionale lokale Grenzwertsätze für große Abweichungen. 114

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Рецензия на книгу А. Реньи «Исчисление вероятностей». *Гнеденко Б. В.* . . 115
Рецензия на книгу О. Оническу, Г. Михок, Ч. Ионеску Тульча «Теория вероятностей и ее приложения». *Гнеденко Б. В.* 117
Рецензия на книгу Л. Шметтерер «Введение в математическую статистику». *Гнеденко Б. В.* 118

Выпуск второй

Севастьянов Б. А. Ветвящиеся случайные процессы для частиц, диффундирующих в ограниченной области с поглощающими границами 121
Sevastjanov B. A. Branching Stochastic Processes for Particles Diffusing in a Restricted Domain with Absorbing Boundaries 136
Шур М. Г. Эргодические свойства марковских цепей, инвариантных на однородных пространствах 137
Shur M. G. Ergodic Properties of Invariant Markov Chains on Homogeneous Spaces 152
Прохоров Ю. В. Усиленная устойчивость сумм и неограниченно-делимые распределения 153
Prohorov Yu. V. Strong Stability and Infinitely Divisible Laws 165
Гихман И. И. Одна предельная теорема для числа максимумов в последовательности случайных величин, связанных в цепь Маркова 166
Gichman I. I. A Limit Theorem for the Number of Maxima in the Sequence of Random Variables in a Markov Chain 172

Добрушин Р. Л. Одна статистическая задача теории обнаружения сигнала на фоне шума в многоканальной системе, приводящая к устойчивым законам распределения 173
Dobrushin R. L. A Statistical Problem in Detecting a Signal in the Noise of a Multi-channel System Reducing to Stable Distributions Laws 185
Рогозин Б. А. Некоторые задачи из области предельных теорем 186
Rogozin B. A. Some Problems in the Field of Limit Theorems 196

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Золотарев В. М. Распределение суперпозиции безгранично делимых процессов. 197
Zolotarev V. M. Distribution of the Superposition of Infinitely Subdivisible Processes 200
Сазонов В. Замечание о характеристических функционалах 201
Sazonov V. On Characteristic Functionals 205
Соболь И. М. Псевдослучайные числа для машины «Стрела» 205
Sobol I. M. Pseudo-random Numbers for the Machine «Strela» 211
Резюме докладов, сделанных на заседаниях научно-исследовательского семинара по теории вероятностей (Москва, сентябрь — март 1957—58 г.) . . . 212
A Summary of Papers Presented at the Sessions of the Scientific Research Seminar on the Theory of Probabilities 212

Выпуск третий

Скороход А. В. Предельные теоремы для процессов Маркова 217
Skorohod A. V. Limit Theorems for Markov Processes 264
Зингер А. А. Независимость квазиполиномиальных статистик и аналитическое свойство распределений 265
Zinger A. A. Independence of Quasi-polinomial Statistics and Analytical Properties of Distributions 284
Монин А. С. Структура атмосферной турбулентности 285
Monin A. S. The Structure of Atmospheric Turbulence 317
Воробьев Н. Н. Ситуации равновесия в биматричных играх 318
Vorobiev N. N. Equilibrium Points in Bimatrix Games 331
Волконский В. А. Случайная замена времени в строго марковских процессах. 332
Volkonski V. A. Random Substitution of Time in Strong Markov Processes . 350

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Беляев Ю. К. О неограниченности выборочных функций гауссовских процессов 351
Belyaev Yu. K. On the Unboundedness of the Sample Functions of Gaussian Processes 354
Кордонский Х. Б. Об одном случае распределения числа дефектных единиц в партиях изделий 354
Kordonski H. B. On a Distribution for the Number of Spoiled Articles in Shipments 358

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Рецензия на книгу Р. Беллье «Теория вероятностей и статистический анализ (элементы)». *Прохоров Ю. В.* 359
Рецензия на книгу Г. Рихтер «Теория вероятностей». *Прохоров Ю. В.* . . . 359

Выпуск четвертый

Мешалкин Л. Д. Предельные теоремы для цепей Маркова с конечным числом состояний 361
Meshalkin L. D. Limit Theorems for Markov Chains with a Finite Number of States 385

Whittle P. Continuous Generalizations of Tchebichev's Inequality 386
Уитл П. Непрерывные обобщения неравенства Чебышева 394
Добрушин Р. Л. Передача информации по каналу с обратной связью . . . 395
Dobrushin R. L. Transmission of Information in Channels with Feedback . 412
Волков И. С. О распределении сумм случайных величин, заданных на однородной цепи Маркова с конечным числом состояний 413
Volkov I. S. On the Distribution of Sums of Random Variables Defined on a Homogeneous Markov Chain with a Finite Number of States 429
Хасьминский Р. З. Диффузионные процессы и эллиптические дифференциальные уравнения, вырождающиеся на границе области 430
Hasminsky R. Z. Diffusion Processes and Elliptic Equations Degenerating at the Boundary of the Region 451

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Башарин Г. П. Финальные вероятности многомерного марковского процесса, описывающего действия некоторых двухкаскадных телефонных систем с отказами 452
Basharin G. P. Final Probabilities for Multi-Dimensional Markov Processes Which Describe the Action of Some Two-Stage Telephone Busy-Signal Systems 458
Гладышев Е. Г. О многомерных стационарных случайных процессах 458
Gladishev E. G. On Multi-Dimensional Stationary Random Processes . . . 462
Добрушин Р. Л. Упрощенный метод экспериментальной оценки энтропии стационарной последовательности 462
Dobrushin R. L. A Simplified Method of Experimentally Evaluating the Entropy of a Stationary Sequence 464
Михалевич В. С. Последовательный выбор между двумя решениями для процесса Пуассона 465
Michalevich V. S. Sequential Selection between Two Solutions for a Poisson Process 470
Цареградский И. П. О равномерном приближении биномиального распределения неограниченно делимыми законами 470
Tsaregradski I. P. On a Uniform Approximation for a Binomial Distribution of Infinitely Divisible Laws 474

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Рецензия на книгу У. Гренандер и М. Розенблатт «Статистический анализ стационарных временных рядов». *Гнеденко Б. В.* 475

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал «Теория вероятностей и ее применения» принимает оригинальные статьи и краткие сообщения по теории вероятностей, общим вопросам математической статистики и применениям теории вероятностей в естествознания и технике. Статьи по прикладным вопросам принимаются лишь в случае существенной новизны применяемых математических методов.

2. Статьи и краткие сообщения печатаются на русском языке с резюме на английском, немецком или французском языках или на английском, немецком, французском языках с резюме на русском языке.

3. Рукопись представляется в двух экземплярах, напечатанной на машинке через 2 интервала на одной стороне листа с указанием адреса автора. Редакция просит в оформлении цитируемой литературы придерживаться порядка, принятого в журнале.

4. Авторам статей высылаются 50 оттисков.

5. Статьи следует направлять по адресу: Москва, В-234, МГУ, Механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей.

NOTE TO AUTHORS

1. The journal «The Theory of Probability and Its Applications» accepts original articles and communications on the theory of probability, general problems of mathematical statistics and applications of the theory of probability to natural science and technology. Articles of the latter kind will be accepted only if the mathematical methods applied are essentially new.

2. Articles and communications will be published either in Russian with summaries in English, German or French, or in English, German or French with summaries in Russian.

3. All contributions should be sent in two copies, which are typewritten only on one side of the sheet with double spaces. References to books and articles cited should conform to the standard adopted by the publishers.

4. The authors will be sent 50 copies of their articles.

5. Authors are requested to address their contributions: Moscow, B-234, MGU (State University), Department of Mathematics and Mechanics.

Технический редактор *Т. А. Михайлова*

Подписано к печати 4/XI-1958 г. Формат бумаги $70\times108^1/_{16}$. Бум. л. $4^1/_4$. Печ. л. 10,27
Уч.-изд. л. 10,4 Тираж 2125 экз. Заказ 3235 Т-11437

2-я типография Издательства АН СССР. Москва, Шубинский пер., д. 10

Цена ~~11 р. 25 к.~~ 2-25

266
ГОСЬЯНОВСКАЯ УЛ. 7 А
Н.37 ТЕЛЕФ. ФИЗ. ГАБ.
ИЛИ НАУЧ. ТЕХ. Б-Г

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Контора «Академкнига»

ИМЕЮТСЯ В ПРОДАЖЕ КНИГИ:

БОГОЛЮБОВ Н. Н., ТОЛМАЧЕВ В. В., ШИРКОВ Д. В. Новый метод в теории сверхпроводимости. 1958. 126 стр. 5 р. 60 к.

ВЗОРОВА А. И. Таблицы для решения уравнения Лапласа в эллиптических областях. Математические таблицы. 1957. 256 стр. 30 р.

КАРПОВ К. А. Таблицы функций $F(z) = S_0^z e^{x^2} dx$ *в комплексной области. Математические таблицы.* 1958. 517 стр. 40 р.

КРЫЛОВ А. Н. Избранные труды. Статья и редакция акад. Ю. А. Шиманского. Примечание проф. И. Г. Хановича. (Серия «Классики науки»). 1958. 803 стр., 2 вкл. 38 р. 10 к.

Памяти Алексея Николаевича Крылова. 1958. 247 стр. 13 р. 70 к.

ЛУЗИН Н. Н., акад. Собрание сочинений. Том II. Дескриптивная теория множеств. 1958. 744 стр. 38 р. 50 к.

Математика и механика в изданиях Академии наук СССР. Библиография. 3. 1948—1952. Составили В. Б. Португаль, Г. И. Натансон, В. П. Алексеева. Под редакцией акад. В. И. Смирнова. (Библиотека АН СССР). 1957. 361 стр. 15 р. 60 к.

МИХАЙЛОВ А. А. Таблицы для приближенного решения обратной геодезической задачи. 1958. 100 стр. 14 р. 10 к.

Труды Математического института им. В. А. Стеклова Академии наук СССР. Том LI. Сборник статей по математической логике и ее приложение к некоторым вопросам кибернетики. 1958, 360 стр. 16 р. 60 к.

Труды Математического института им. В. А. Стеклова Академии наук СССР. Том LII. Проблема конструктивного направления в математике. 1. Сборник работ. 1958. 348 стр. 18 р. 55 к.

Книги продаются в магазинах «Академкнига»
Для получения книг почтой
заказы направлять к контору «Академкнига»
Москва, К-12, ул. Куйбышева, 8
Отдел «Книга — почтой»

или в ближайший магазин «Академкнига» по адресу: Москва, ул. Горького, 6 (магазин № 1); Москва, 1-й Академический пр-зд, 55/5 (магазин № 2); Ленинград, Литейный проспект, 57; Свердловск, ул. Белинского, 71-в; Киев, ул. Ленина, 42; Харьков, Горяиновский пер., 4/6; Алма-Ата, ул. Фурманова, 125; Ташкент, ул. Карла Маркса, 29; Баку, ул. Джапаридзе, 13.